Dr. Ana Cannas

Serie 11:

Systeme Dgl 1.Ordnung & lineare Dgl höherer Ordnung

Hinweis:

Keine Aufwärmübungen! Falls Sie diese Serie nicht lange genug finden, dann empfehlen wir Ihnen die folgenden, *zusätzlichen*, Übungen aus Papula **Bd. 2** Kapitel IV

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1,6,7,10 und 12 (S. 526-528),
- zu Abschnitt 5 die Übungsaufgaben 2 und 9 (S. 532-533).
  Hinweis: in Aufgabe 2 ist einer der Eigenwerte stets $\in \{0, \pm 1, 2, -a\}$.
- zu Abschnitt 7 die Übungsaufgaben 2,4,7 und 9 (S. 536-538).

1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 12y, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= 3x + y, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= y & x(0) &= 1, \\ \dot{y} &= -x & y(0) &= 3. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y, & x(0) &= 4, \\ \dot{y} &= x - y, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung des in der Vorlesung angegebenen Ansatzes für die jeweilige Inhomogenität.

a) $$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 2y + 10\cos t, & x(0) &= -4, \\ \dot{y} &= -2x - 2y, & y(0) &= 3. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + e^{-2t}, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= 4x - 2y - 2e^{t}, & y(0) &= -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 - 2\,y_3 + g(x), \\ y_2' &= -y_2 + h(x), \\ y_3' &= y_1 - y_3, \end{aligned}$$

für folgende „Störfunktionen“:

a) $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$ **b)** $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 0$

c) $g(x) = 0$ und $h(x) = 6$ **d)** $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 6$

4. **a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$ **ii)** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

iii) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' = 0$ **iv)** $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Gleichung $y^{(3)} - y' = q$ für

i) $q(x) = e^{2x}$ **ii)** $q(x) = e^{x}$

iii) $q(x) = x^2$ **iv)** $q(x) = \cos x$

anhand der in der Vorlesung besprochenen Ansätze.

5. Harmonische Schwingungen mit einem Freiheitsgrad werden durch lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben; und zwar freie Schwingungen durch homogene, erzwungene Schwingungen durch inhomogene.

a) Bestimmen und diskutieren Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,d\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0,$$

wobei $d > 0$ die Dämpfungs-, $k > 0$ die Elastizitätskonstante bezeichnen,

i) für den Fall $d^2 < k$ (sogenannte *schwache Dämpfung*).

ii) für den Fall $d^2 = k$ (sogenannte *kritische Dämpfung*).

iii) für den Fall $d^2 > k$ (sogenannte *starke Dämpfung*).

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,d\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = K\cos(\omega t)\,, \qquad (\star)$$

$d, k > 0$, beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator, auf den eine periodische Erregung mit Amplitude $K > 0$ und Frequenz $\omega > 0$ wirkt.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Gleichung ($\star$) und zeigen Sie, dass diese für $t \to \infty$ gegen eine harmonische *Resonanzschwingung*

$$x_R(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (\star\star)$$

mit der Frequenz ω und einer Phase φ konvergiert.

c) Diskutieren Sie - bei festen Konstanten $d, k > 0$ in ($\star$) - die Amplitude A der Resonanzschwingung ($\star\star$) in Funktion der Frequenz ω.