D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 13
Dr. Ana Cannas

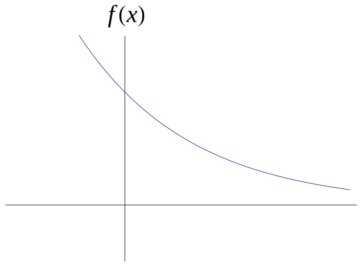
Serie 13: Online Test

Einsendeschluss: 31. Januar 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?



(a) Die Funktion f ist positiv.

Richtig: die ganze Kurve liegt oberhalb der x-Achse.

√ (b) Die Ableitung f' ist positiv.

Falsch: die Funktion ist monoton fallend.

(c) Die zweite Ableitung f'' ist nichtnegativ.

Richtig: Die Kurve ist strikt konvex.

2. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die Ableitung der Funktion

√ (a) $x(t) = \dfrac{1}{t^2} + t \ln t, \quad t > 0, \quad \text{ist} \quad \dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^2} + \ln t + t.$

Falsch. Es gilt $\dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^3} + \ln t + 1.$

(b) $x(t) = e^{\ln t + t^2}, \quad t > 0, \quad \text{ist} \quad \dot{x}(t) = \left(1 + 2t^2\right) e^{t^2}.$

Richtig. Es gilt $x(t) = e^{\ln t} e^{t^2} = te^{t^2}$, also $\dot{x}(t) = e^{t^2} + 2t^2 e^{t^2}$.

(c) $x(t) = \dfrac{\sin^2(t^2)}{\cos(t^2)} \quad \text{ist} \quad \dot{x}(t) = 2t \sin(t^2) \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2(t^2)}\right).$

Richtig. Es gilt $x(t) = \dfrac{1 - \cos^2(t^2)}{\cos(t^2)} = \dfrac{1}{\cos(t^2)} - \cos(t^2)$, also

$$\dot{x}(t) = -\frac{-2t \sin(t^2)}{\cos^2(t^2)} + 2t \sin(t^2) = 2t \sin(t^2) \left(1 + \frac{1}{\cos^2(t^2)}\right).$$

3. Welche der folgenden Funktionen ist streng monoton wachsend im Intervall $]-1, 1[$?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

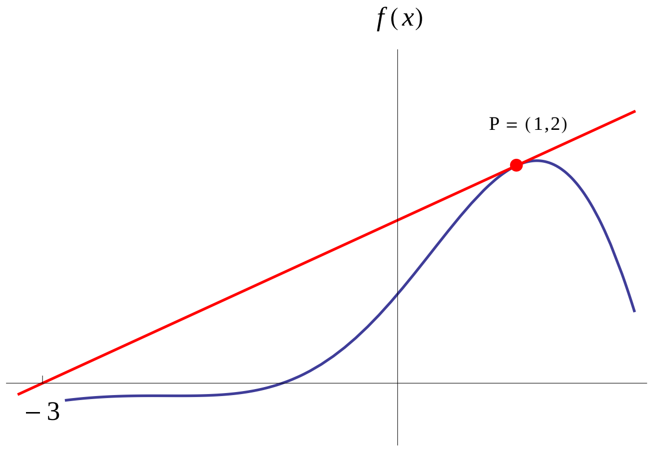
√ (d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

(f) Keine.

Auf $]-1, 0]$ ist x^2 streng monoton fallend und $|x|+x = 0$ konstant, also scheiden diese aus. Wegen $(\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0 = 0^3 - 0$ scheidet auch $x \mapsto x^3 - x$ aus. Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist sowieso streng monoton fallend. Nur die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist hier streng monoton wachsend.

4. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. Sei $f(x) = \pi + 2\arctan(x)$ und $g(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Der Definitionsbereich von arctan ist $\mathbb{R}$, das ändert sich nicht nach Skalierung und Verschiebung. Da arctan überall differenzierbar ist, gilt das auch für f, wobei

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Der Wertebereich von $f(x)$ ist $(0, 2\pi)$.

Der Wertebereich von arctan ist und f dort injektiv ist, ist $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Somit ist der Wertebereich von f gleich $\pi + 2\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2\pi)$

√ (c) $g(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Da der Wertebereich von f gleich $(0, 2\pi)$ ist die Umkehrfunktion nur auf diesem Intervall definiert und differenzierbar.

(d) $g(x) = \tan\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$

$$f(x) = y = \pi + 2\arctan(x) \Rightarrow \frac{y-\pi}{2} = \arctan(x) \Rightarrow x = \tan\left(\frac{y-\pi}{2}\right).$$

(e) $g(x) = \cot\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

Man verwende die Beziehung $\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Dann ist

$$\tan\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right) = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right).$$

6. Welche der folgenden Formeln ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Das ist der hyperbolische Satz des Pythagoras.

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \cosh 2x.\end{aligned}$$

(c) $2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x$.

Es gilt

$$2\cosh^2 x = 1 + \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + \cosh 2x,$$

wobei die erste Gleichheit mit der ersten, die zweite mit der zweiten Formel folgt.

✓ (d) $2\sinh^2 x = 1 + \sinh 2x$.

Wie oben folgt

$$2\sinh^2 x = \sinh^2 x + \cosh^2 x - 1 = \cosh 2x - 1.$$

Erfüllt x die angegebene Formel, so folgt also

$$2 = \cosh 2x - \sinh 2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = e^{-2x}$$

also $x = -\frac{\ln 2}{2}$. Für alle übrigen $x \in \mathbb{R}$ ist die Formel falsch.

7. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ ist gerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{2}{e^x - 1} + \frac{x}{2}\frac{e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad \text{also}\\ f(-x) &= \frac{-x}{2}\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{-x}{2}\frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x).\end{aligned}$$

Zudem ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{0}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$.

8. Welche der folgenden Identitäten ist richtig?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 1.$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = \dfrac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0 - 1} = \dfrac{0}{-1} = 0.$

Die Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert fälschlicherweise

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cos(\pi x)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = 1.$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = \dfrac{\ln(0+1)}{\sin 0 + 1} = \dfrac{\ln 1}{1} = 0.$

Die Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert fälschlicherweise

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x/(x^2+1)}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x^2+1)}{\cos(x^2)} = \frac{1/1}{1} = 1.$$

$\surd$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1/x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1.$

9. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

√ (d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(e) durchaus anwendbar und die Überlegung ist richtig!

Die Regel von de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2=0$ und $x^2-3x+2=0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

10. Das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ ist

√ (a) $1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

(b) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

(c) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

Es gelten

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x}\,\cos x, \\ f''(x) &= e^{\sin x}\,\cos^2 x - e^{\sin x}\,\sin x, \\ f'''(x) &= e^{\sin x}\,\cos^3 x - 3\,e^{\sin x}\,\cos x\,\sin x - e^{\sin x}\,\cos x, \end{aligned}$$

also $f(0) + f'(0)\,x + \dfrac{f''(0)}{2}\,x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}\,x^3 = 1 + 1\,x + \dfrac{1}{2}\,x^2 + 0\,x^3$.

11. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

√ (a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) subtrahiert.

(d) multipliziert.

(e) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f + g$ zweier Funktionen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Wegen

$$(f+g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

ist die erste Antwort die richtige.

12. Betrachten Sie die Taylorentwicklung der Sinusfunktion $\sin x$ um $x_0 = 0$.

Von welcher *minimalen* Ordnung muss das Maclaurinsche Polynom sein, wenn die Abschätzung des Lagrange-Restgliedes sichern soll, dass für $|x| < 10^{-3}$ eine Genauigkeit von 10^{-10} erreicht wird?

(a) Von erster Ordnung.

√ (b) Von dritter Ordnung.

(c) Von fünfter Ordnung.

Die Maclaurinsche Reihe der Sinusfunktion ist

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots .$$

Für das Restglied gilt

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{(-1)^n \cos(\theta x)\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{1}{10^{6n+3}(2n+1)!},$$

da $|\cos x| \leq 1$ und $|x| < 10^{-3}$. Die geforderte Genauigkeit wird also für $2n = 4$ erreicht. Da die Koeffizienten der geraden Potenzen in der Entwicklung von $\sin(x)$ verschwinden, genügt das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung.

13. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (1-x)x^2$$

im Intervall $[0,1]$ ist **falsch**?

(a) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x=0$ an.

√ (b) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x=\frac{1}{3}$ an.

(c) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x=1$ an.

(d) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x=\frac{2}{3}$ an.

Die kritischen Punkte von f sind die Nullstellen der ersten Ableitung,

$$0 \stackrel{!}{=} f'(x) = x\,(2-3x)\,.$$

Also hat f kritische Punkte bei $x_1=0$ und $x_2=\frac{2}{3}$. An diesen Stellen nimmt f die Werte

$$f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

an. Ausserdem gilt an den Randpunkten des Definitionsbereiches $[0,1]$

$$f(0) = 0 \text{ und } f\,(1) = 0.$$

Daher sind die Punkte $x=0,1$ jeweils globale Minima und $x=\frac{2}{3}$ das globale Maximum im Intervall $[0,1]$.

14. Die Gleichung $x\ln(x) = 1$ besitzt im Intervall $[1,3]$

√ (a) genau eine reelle Lösung, die man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens beliebig genau berechnen kann.

(b) genau zwei reelle Lösungen, die man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens beliebig genau berechnen kann.

(c) wenigstens eine reelle Lösungen, gegen die das Newtonsche Verfahren für keinen Startwert konvergiert.

(d) keine reelle Lösung.

Die Lösung dieser Gleichung ist die Abszisse des Schnittpunktes der Graphen der streng monotonen Funktionen $x \to \ln x$ und $x \to 1/x$. Man sieht sofort, dass es genau einen solchen Schnittpunkt zwischen 1 und 3 gibt (da $\ln 1 = 0$ und $\ln 3 > \ln e = 1$).

Für die Funktion $f(x) = x\ln x - 1$ ergeben sich $f'(x) = \ln x + 1$ und $f''(x) = \frac{1}{x}$, sie ist also auf $[1,3]$ streng monoton wachsend und zweimal stetig differenzierbar. Daher konvergiert das Newtonsche Verfahren, z.B. mit dem Startwert $x_0 = 3$. Die Lösung ist $x \approx 1.763$.

15. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ keine Minimalstelle von $f(x) = x^3$.

(b) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ ein Minimum von $f(x) = x^4$.

√ (c) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

Richtig. x ist dann ein Sattelpunkt (vgl. Papula Bd. 1 IV 3.4.2).

16. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$.

√ (a) $e - 1$

(b) e^x

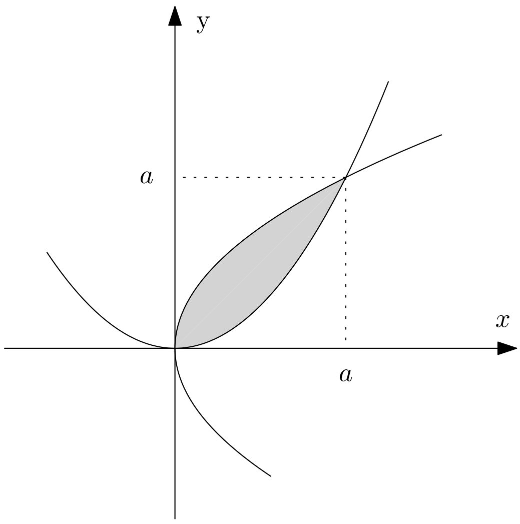
(c) 1

(d) 0

(e) $\ln(1) - \ln(0)$

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

17.



Sei $a > 0$. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur, die zwischen den beiden kongruenten Parabeln $x^2 = ay$ und $y^2 = ax$ liegt?

√ (a) $F = \dfrac{1}{3}\, a^2$.

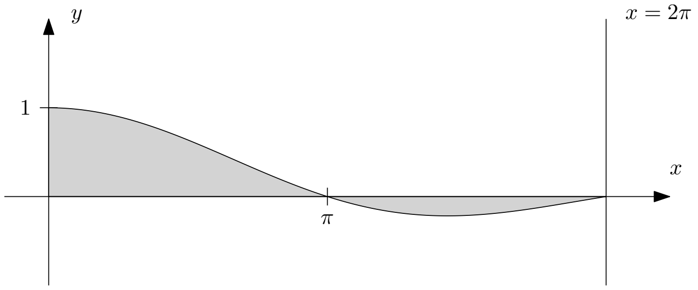
(b) $F = \dfrac{1}{2}\, a^2$.

(c) $F = \dfrac{2}{3}\, a^2$.

Es gilt

$$F = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left(\frac{2}{3}\, \sqrt{a}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Bigg|_0^a = \frac{2}{3}\, a^2 - \frac{1}{3}\, a^2 = \frac{1}{3}\, a^2.$$

18. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2\pi$ begrenzt wird



ist

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

√ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$

(c) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|.$

Im allgemeinen besteht die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, den Koordinatenachsen und den Geraden $x = a$ und $x = b$, $a < b$, aus je einem Teil über und unter der Abszissenachse. Das Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ liefert dann die Differenz der beiden Flächeninhalte, $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right|$ den Absolutbetrag der Differenz. Das Integral $\int_a^b |f(t)|\, dt$ zählt beide mit positivem Vorzeichen.

19. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

Richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G'$.

√ (b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

Falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber x^2 keine Stammfunktion von 1.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

Richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F'$.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

Richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.

20. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^x |t|\, dt = \frac{x|x|}{2}.$$

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Es gilt

$$\int_0^x |t|\, dt = \begin{cases} \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2} = \frac{x|x|}{2}, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\int_0^x t\, dt = -\frac{x^2}{2} = \frac{x|x|}{2} & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

21. Es sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall I.

Dann ist jede Funktion F mit

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt, \qquad x \in I,$$

für ein $x_0 \in I$ eine Stammfunktion von f.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t)\, dt = f(x).$$

für alle $x_0 \in I$

22. Ist $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $b \in [a, c]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_b^c f(t)\, dt.$$

Hinweis: Betrachten Sie die stetige Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für die Funktion F gilt $F(a) = 0$ und $F(c) = \displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein Stelle $b \in [a, c]$ mit $F(b) = \frac{1}{2}F(c)$, also

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(c) - \frac{1}{2}F(c) = \int_a^c f(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt = \int_b^c f(t)\, dt.$$

23. Welche der folgenden Funktionen ist für $x > 0$ **nicht** monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t \, \mathrm{d}t$

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t$

$\surd$ (c) $x \mapsto \int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t$

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t \, \mathrm{d}t$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf (c) alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend.
Eine geometrische Begründung: Ausser bei (c) wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

24. Wie lautet die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t) \, \mathrm{d}t$?

(a) $f'(x) = 4\sin(\cos x)$

(b) $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$

$\surd$ (c) $f'(x) = -2\sin x$

(d) $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$

Es gilt

$$f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t) \, \mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\cos x}^{\cos x} 1 \, \mathrm{d}t}_{= [t]_{-\cos x}^{\cos x} = 2\cos x} + \underbrace{\int_{-\cos x}^{\cos x} 2\sin t \, \mathrm{d}t}_{= 0} = 2\cos x.$$

Der Wert des zweiten Integrals ist Null, da der Integrand eine ungerade Funktion darstellt und das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Damit finden wir

$$f'(x) = -2\sin x.$$

Die dritte Antwort ist also die richtige.
Äquivalent könnten wir $f(x)$ nach der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ableiten.

25. Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

√ (c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) ist falsch, falls f eine konstante Funktion ist.

Die Formel folgt durch partielle Integration der Funktion $1 \cdot f(x)$, wobei 1 integriert und $f(x)$ differenziert wird. Richtig ist also (c). Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung betrifft dagegen das bestimmte Integral. Substituiert wird auch nichts: Auf beiden Seiten steht $f(x)$ und nicht f von etwas anderem.

26. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi \cdot \sin\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

√ (e) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

Alle Rechnungen sind richtig; die Antwort lautet also (e). In (a) wird $\sin\varphi$ integriert und $\cos\varphi$ differenziert; in (b) ist es umgekehrt. Obwohl die rechten Seiten verschieden aussehen, sind sie doch bis auf eine Integrationskonstante gleich, da nach Pythagoras $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist. In (c) wird x integriert und $\ln x$ differenziert. In (d) schreibt man den Integranden in der Form $x \cdot 2xe^{x^2}$ und integriert $2xe^{x^2}$ und differenziert x.

27. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

√ (a) $\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(b) $\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(c) $\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(d) $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(e) keines davon

Mit der Substitution $x =: 2\sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(\frac{x}{2})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\cos(t)}{2\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C \\ &= \arcsin(\tfrac{x}{2}) + C,\end{aligned}$$

d.h. Antwort 1 ist richtig.
Äquivalent könnten wir überprüfen, welche Funktion die Ableitung gleich $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ hat:

$$\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

28. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

√ (a) $\frac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \frac{1}{x+1} + C$

(c) $\frac{2}{(x+1)^3}$

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+1} + C$

(e) keines davon

Wegen $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - (x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x + (x+1)^{-1} + C \\ &= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C \\ &= \frac{x^2}{x+1} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können. Somit ist Antwort 1 korrekt.

29. Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt.$$

Welches der folgenden Polynome P erfüllt

$$P(0) = f(0), \qquad P'(0) = f'(0) \qquad \text{und} \qquad P''(0) = f''(0)?$$

(a) $x^2 + x + 1$

√ (b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 1$

(c) $x^2 + \dfrac{x}{2} + 1$

Aus

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= P(0) = a, \\ \frac{1}{2} = \frac{1+\sin 0}{2+0} &= f'(0) = P'(0) = b \quad \text{und} \\ \frac{1}{2} = \frac{\cos(0)(2+0) - (1+\sin 0)0}{(2+0)^2} &= f''(0) = P''(0) = 2c \end{aligned}$$

folgt $P(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 1.$

30. Im Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange findet man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln \frac{b}{a} \qquad \text{für} \qquad b \geq a > 0.$$

Mit der Substitution $t = ax$ bzw. $t = bx$ folgt

$$\ln \frac{b}{a} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = 0.$$

Wo liegt der Grund für diese Absurdität?

(a) Die Substitutionsregel wurde falsch angewandt.

√ (b) Die beiden letzten Integrale divergieren.

(c) Daran ist nichts falsch. Aus $\ln \frac{b}{a} = 0$ folgt $a = b$.

Für $0 < a \leq 1 \leq b$ gilt

$$\int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_a^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq \frac{1}{e}\int_a^1 \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{b}\int_1^b e^{-t}\,dt,$$

also $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq \frac{1}{e}\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{e}\lim_{a\to 0}\ln\frac{1}{a} = \infty.$

31. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y' + y^2 + x = 0$

(b) $y'^2 + y + x = 0$

$\checkmark$ (c) $y' + x^2 y = 0$

(d) $y' + xy^2 = 0$

Eine lineare Differentialgleichung für eine Funktion $y(x)$ muss linear in y und y' sein, aber nicht notwendigerweise in x. Also ist nur die dritte Antwort richtig.

32. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y = xy' + (y')^2$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf.

$\checkmark$ (b) $\dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$

Richtig, die Gleichung lässt sich umschreiben zu $y' = (x-1) \cdot y + \dfrac{1-x^2}{x^2}$

(c) $(y' - 2)^2 = y$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf auf.

(d) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

Falsch, denn y tritt quadratisch (und im Nenner) auf.

33. Die Differentialgleichung

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1)$$

geht durch Trennen der Variablen über in

(a) $yy' = \ln(x+1)$.

(b) $\dfrac{y'}{y} = \ln(x+1) + 1$.

(c) $yy' = \ln(x+1)^2$.

√ (d) $\dfrac{y'}{y+1} = \ln(x+1)$.

Die einzig korrekte Umformung ist:

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1) = (y+1)\ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y+1} = \ln(x+1).$$

34. Die Differentialgleichung $y' = x^2 + 2xy + y^2$

(a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

√ (c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = x + y$ folgt $y' = u + xu' = (x+y)^2 = u^2$, die Substitution führt also auf die Differentialgleichung $u' = \dfrac{u(u-1)}{x}$ mit getrennten Variablen.

35. Die Differentialgleichung $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} + \sin\frac{y}{x}$

(a) ist linear.

√ (b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = \dfrac{y}{x}$ folgt $y' = u + xu' = \dfrac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{u}{1-u^2} + \sin u$, die Substitution führ also auf die Gleichung $u' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{u^3}{1-u^2} + \sin u\right)$ mit getrennten Variablen.

36. Die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x^2} y + \sin x$

√ (a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

37. Unter dem *Prinzip der Variation der Konstanten* für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung versteht man

(a) die Tatsache, dass die Lösung einer solchen Differentialgleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

(b) die Art, wie die Lösung von den in einer solchen Differentialgleichung vorkommenden Konstanten abhängt.

(c) das Verfahren, zuerst die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung zu bestimmen und danach die Integrationskonstante zu berechnen, welche die gegebene Anfangsbedingung garantiert.

√ (d) den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot y_h(x)$ für eine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen Gleichung und einer noch zu bestimmenden Funktion $C(x)$.

Alle Antworten nennen relevante Aspekte von Differentialgleichungen, aber mit *Variation der Konstanten* ist spezifisch der letztgenannte Ansatz gemeint.

38. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differentialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

(a) besitzt die Funktion $y(x) = x$ als Lösung.

$y(x) = x$ ist eine Lösung, was wir durch Einsetzen sofort sehen:

$$\frac{x^2}{2}x'' - xx' + x = -x \cdot 1 + x = 0.$$

(b) besitzt die Funktion $y(x) = x^2$ als Lösung.

$y(x) = x^2$ ist eine Lösung, was wir durch Einsetzen sofort sehen:

$$\frac{x^2}{2}(x^2)'' - x(x^2)' + x^2 = \frac{x^2}{2} \cdot 2 - x \cdot 2x + x^2 = 0.$$

(c) besitzt unendlich viele Lösungen.

Zum Beispiel sind alle skalaren Vielfachen aus (a) und (b) ebenfalls Lösungen, es gibt also unendlich viele

√ (d) besitzt genau zwei Lösungen.

Diese Aussage ist falsch, Lösungen sind zum Beispiel

$$y_1(x) = x,\ y_2(x) = 2x,\ y_3(x) = 3x, ...$$

39. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

√ (c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(d) Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

Eine homogene lineare Differentiagleichung 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$ und ist damit separierbar. Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden: Zu (a) ist $y' = \sin y$ separierbar, jedoch keine lineare Differentialgleichung, zu (b) ist $y' + xy = \sin x$ eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, welche nicht separierbar ist und zu (d) ist $y' + \sin(x)y + y^2 = 0$ zwar homogen und 1. Ordnung, jedoch nicht separierbar. Richtig ist also (c).

40. Die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2\,y(x) + \sin x, \qquad y(0) = 1,$$

erfüllt

(a) $4\,y(2\pi) = 5\,e^{6\pi} - 1$.

√ (b) $5\,y(2\pi) = 6\,e^{4\pi} - 1$.

(c) $6\,y(2\pi) = 4\,e^{5\pi} - 1$.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y_h(x) = C\,e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$ mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\sin x = y_p'(x) - 2\,y_p(x) = -(A+2B)\sin x + (B-2A)\cos x,$$

also $A = -\frac{1}{5}$ und $B = -\frac{2}{5}$. Aus

$$1 = y(0) = y_h(0) + y_p(0) = C - \frac{1}{5}$$

folgt $C = \frac{6}{5}$ und somit $y(x) = \frac{6}{5}\,e^{2x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$.

41. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y''+3y'+2y = 0$ ist **falsch**?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

(d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to \infty$.

√ (e) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to -\infty$.

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$ mit den einfachen Nullstellen -2 und -1, also lautet die allgemeine Lösung $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ für Konstanten A und B. Dann ist $y(0) = A + B$ und $y(1) = Ae^{-2} + Be^{-1}$. Für beliebige Randwerte $y(0)$ und $y(1)$ sind diese Gleichungen simultan lösbar; somit sind die Aussagen (a) bis (c) richtig. Auch (d) ist richtig, weil es eine Lösung mit diesem Startwert gibt und jede (!) Lösung für $x \to \infty$ beschränkt bleibt. Dagegen geht jede von Null verschiedene Lösung für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$; deshalb ist (e) falsch. Die korrekte Antwort lautet also (e).

42. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y''+3y'+2y=0$ ist **falsch**?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-3$.

$\surd$ (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0)=0$.

(d) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Aussagen (a) und (d) sind richtig nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz – sogar ohne jede Rechnung. In (c) ist dagegen eine Nebenbedingung zuwenig, und nach demselben Satz existiert zu jedem beliebigen zweiten Startwert $y'(0)$ eine Lösung. Es existieren also unendlich viele Lösungen in (c), und deshalb ist die Aussage (c) falsch. In (b) ist zwar eine Nebenbedingung zuviel, und das kann im Allgemeinen dazu führen, dass keine Lösung existiert. Das Beispiel war aber gerade so gewählt, dass es eine gibt, nämlich $e^{-x}-e^{-2x}$, wie man durch Ansatz und Koeffizientenvergleich feststellt, so dass (b) in diesem Fall richtig ist. Die korrekte Antwort lautet also (c).

43. A habe die Eigenwerte 0 und 1 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t)=A\,\vec{x}(t)$?

$\surd$ (a) $x_1(t)=c_1e^t+c_2$ mit Konstanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

(b) $x_1(t)=e^{c_1t}-2\,e^{c_2t}$ mit Konstanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

(c) $x_1(t)=c_1e^t+c_2e^{-2t}$ mit Konstanten $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Mit $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ist auch $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Die allgemeine Lösung von $\dot{\vec{x}}(t)=A\,\vec{x}(t)$ ist daher von der Form

$$\vec{x}(t)=c_1e^t\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Also ist die erste Antwort richtig.

44. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

√ (a) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t grösser als 10 wird.

(b) $|\vec{x}(t)|$ auch für beliebig grosse t kleiner als 10 bleibt.

(c) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t kleiner als $\frac{1}{10}$ wird.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 1 und 3, daher gilt $|\vec{x}(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.

45. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t),\\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t),\end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

√ (b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

Es gilt

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}+\dot{y} & = & 4x\\ \dot{x}-\dot{y} & = & 6x\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl}2\dot{x} & = & 4x+6y\\ 2\dot{y} & = & 4x-6y\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl}\dot{x} & = & 2x+3y\\ \dot{y} & = & 2x-3y\end{array} \Leftrightarrow \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

mit $\vec{x} = (x, y)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)\,(\lambda-3)\,,$$

die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Aus

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -2a, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 3d,$$

erhalten wir die zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &= C_1 + 3C_2,\\ y(0) = 0 &= -2C_1 + C_2, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad C_1 = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{2}{7}$$

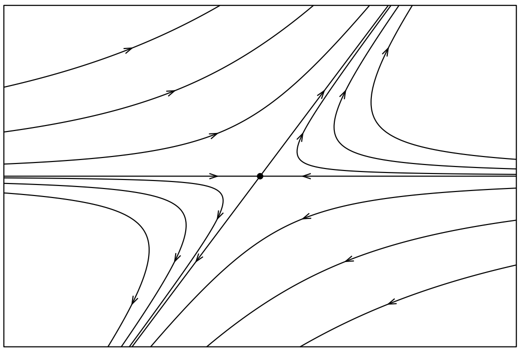
und somit

$$x\,(t) = \frac{1}{7}e^{-4t} + \frac{6}{7}e^{3t} \qquad \text{und} \qquad y\,(t) = -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}e^{3t}.$$

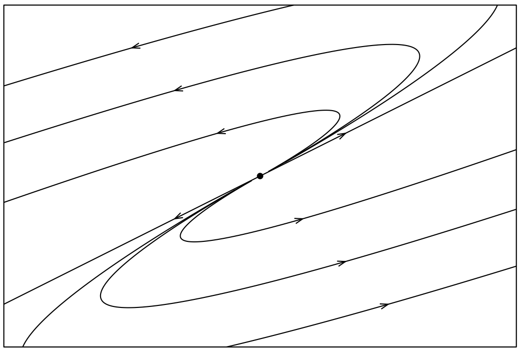
Also ist nur die zweite Antwort richtig.

46. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

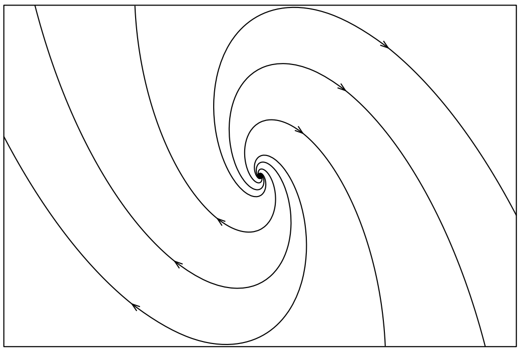
(a)



(b)



$\surd$ (c)



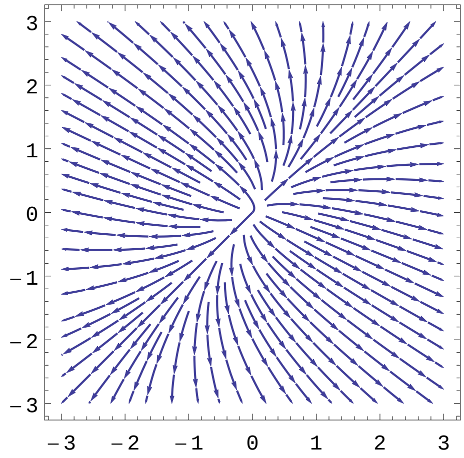
Die Bahnkurven der Abbildung in c) weisen spiralförmigen Charakter auf. Diese entsprechen genau Lösungen, deren Komponenten Linearkombinationen folgender Funktionen sind

$$e^{at}\cos(bt) \text{ und } e^{at}\sin(bt),\ \ a, b \neq 0.$$

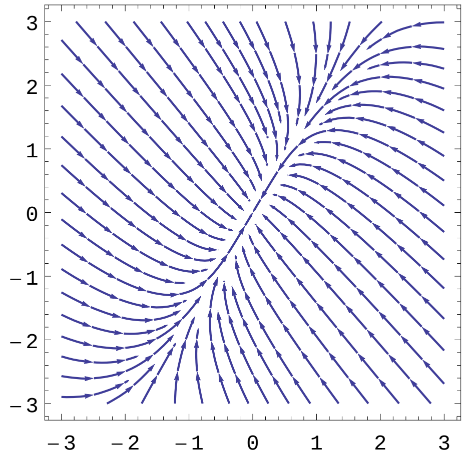
47. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \; ?$$

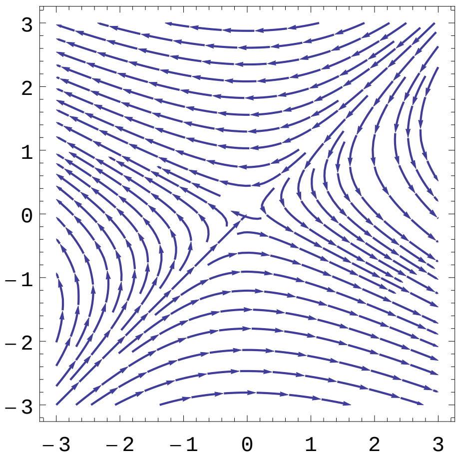
(a)



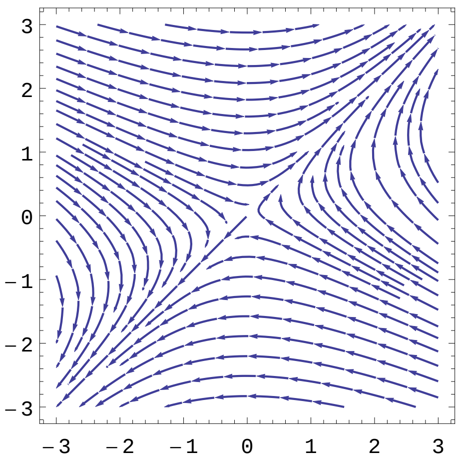
(b)



√ (c)



(d)



Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

48. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0$$

(wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) ist korrekt?

√ (a) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Richtig. Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$. Wegen der doppelten reellen Nullstelle 1 ist die allgemeine Lösung wie angegeben.

(b) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

49. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' - \omega^2 y = 0 \text{ (mit } \omega \neq 0 \text{ konstant)}$$

ist korrekt?

(a) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 x e^{-\omega x}.$$

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

√ (b) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Richtig. Eine Begründung liefert wieder die charakteristische Gleichung, $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, mit zwei reellen Nullstellen $\lambda = \pm\omega$.
Alternative mit direkter Rechung: Es gilt $(e^{\omega x})'' = (\omega e^{\omega x})' = \omega^2 e^{\omega x}$ und $(e^{-\omega x})'' = (-\omega e^{-\omega x})' = \omega^2 e^{-\omega x}$. Daher sind $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$.

Man kann sich nun überlegen, dass diese beiden Funktionen linear unabhängig sind: In den üblichen Ansatz $\lambda_1 e^{\omega x} + \lambda_2 e^{-\omega x} = 0$ kann man geschickt Werte von x einsetzen (z.B. $x = 0, 1$) und erhält so ein Gleichungssystem in den Variablen λ_1 und λ_2, welches nur die triviale Lösung besitzt.

Weiter ist $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung und so müssen diese beiden Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen.

(c) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

50. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

√ (a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

(e) Keine.

Wie im Fall 2. Ordnung liefert Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ in die DGL die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.