D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 13
Dr. Ana Cannas

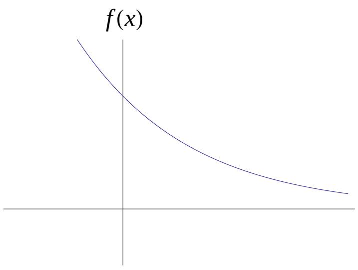
Serie 13: Online Test

Einsendeschluss: 31. Januar 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?



(a) Die Funktion f ist positiv.

(b) Die Ableitung f' ist positiv.

(c) Die zweite Ableitung f'' ist nichtnegativ.

2. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die Ableitung der Funktion

(a) $x(t) = \frac{1}{t^2} + t \ln t, \quad t > 0, \quad$ ist $\quad \dot{x}(t) = -\frac{2}{t^2} + \ln t + t.$

(b) $x(t) = e^{\ln t + t^2}, \quad t > 0, \quad$ ist $\quad \dot{x}(t) = \left(1 + 2t^2\right) e^{t^2}.$

(c) $x(t) = \frac{\sin^2(t^2)}{\cos(t^2)}$ ist $\dot{x}(t) = 2t \sin(t^2) \left(1 + \frac{1}{\cos^2(t^2)}\right).$

3. Welche der folgenden Funktionen ist streng monoton wachsend im Intervall $]-1,1[$?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

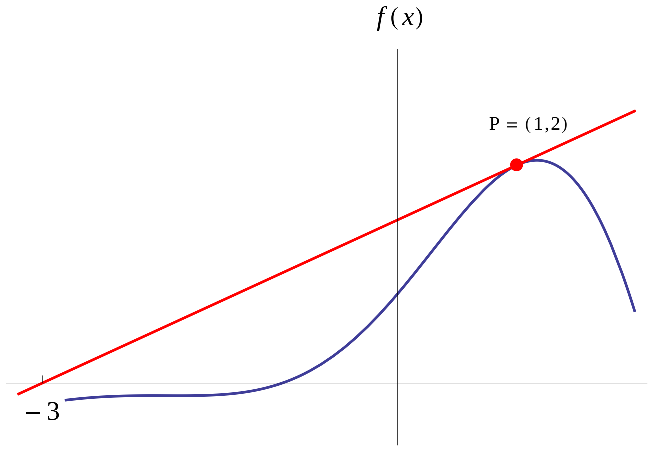
(c) $x \mapsto x^3 - x$

(d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

(f) Keine.

4. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

5. Sei $f(x) = \pi + 2\arctan(x)$ und $g(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

(b) Der Wertebereich von $f(x)$ ist $(0, 2\pi)$.

(c) $g(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

(d) $g(x) = \tan\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$

(e) $g(x) = \cot\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

6. Welche der folgenden Formeln ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x.$

(c) $2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x.$

(d) $2\sinh^2 x = 1 + \sinh 2x.$

7. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ ist gerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Welche der folgenden Identitäten ist richtig?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$

9. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(e) durchaus anwendbar und die Überlegung ist richtig!

10. Das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ ist

(a) $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

11. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

(a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) subtrahiert.

(d) multipliziert.

(e) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

12. Betrachten Sie die Taylorentwicklung der Sinusfunktion $\sin x$ um $x_0 = 0$.

Von welcher *minimalen* Ordnung muss das Maclaurinsche Polynom sein, wenn die Abschätzung des Lagrange-Restgliedes sichern soll, dass für $|x| < 10^{-3}$ eine Genauigkeit von 10^{-10} erreicht wird?

(a) Von erster Ordnung.

(b) Von dritter Ordnung.

(c) Von fünfter Ordnung.

13. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (1 - x)x^2$$

im Intervall $[0, 1]$ ist **falsch**?

(a) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = 0$ an.

(b) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(c) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = 1$ an.

(d) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

14. Die Gleichung $x \ln(x) = 1$ besitzt im Intervall $[1, 3]$

(a) genau eine reelle Lösung, die man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens beliebig genau berechnen kann.

(b) genau zwei reelle Lösungen, die man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens beliebig genau berechnen kann.

(c) wenigstens eine reelle Lösungen, gegen die das Newtonsche Verfahren für keinen Startwert konvergiert.

(d) keine reelle Lösung.

15. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

(b) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

(c) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

16. Berechnen Sie $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$.

(a) $e - 1$

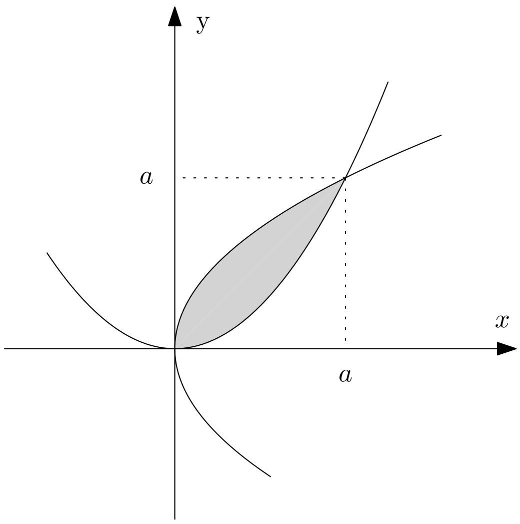
(b) e^x

(c) 1

(d) 0

(e) $\ln(1) - \ln(0)$

17.



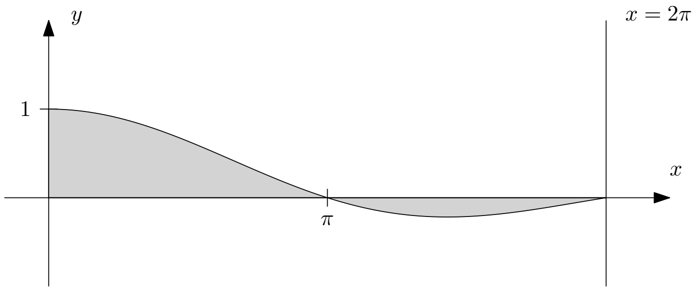
Sei $a > 0$. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur, die zwischen den beiden kongruenten Parabeln $x^2 = ay$ und $y^2 = ax$ liegt?

(a) $F = \dfrac{1}{3}\, a^2$.

(b) $F = \dfrac{1}{2}\, a^2$.

(c) $F = \dfrac{2}{3}\, a^2$.

18. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2\pi$ begrenzt wird



ist

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$

(c) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|.$

19. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

(b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

20. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^x |t|\, dt = \frac{x|x|}{2}.$$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

21. Es sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall I.

Dann ist jede Funktion F mit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in I,$$

für ein $x_0 \in I$ eine Stammfunktion von f.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

22. Ist $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $b \in [a, c]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_b^c f(t)\,dt.$$

Hinweis: Betrachten Sie die stetige Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

23. Welche der folgenden Funktionen ist für $x > 0$ **nicht** monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t$

(b) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$

(c) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$

(d) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$

24. Wie lautet die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t)\,\mathrm{d}t$?

(a) $f'(x) = 4\sin(\cos x)$

(b) $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$

(c) $f'(x) = -2\sin x$

(d) $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$

25. Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

(c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) ist falsch, falls f eine konstante Funktion ist.

26. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi \cdot \sin\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int x \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

27. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

(a) $\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(b) $\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(c) $\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(d) $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(e) keines davon

28. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(a) $\frac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \frac{1}{x+1} + C$

(c) $\frac{2}{(x+1)^3}$

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+1} + C$

(e) keines davon

29. Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt.$$

Welches der folgenden Polynome P erfüllt

$$P(0) = f(0), \qquad P'(0) = f'(0) \qquad \text{und} \qquad P''(0) = f''(0)?$$

(a) $x^2 + x + 1$

(b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 1$

(c) $x^2 + \dfrac{x}{2} + 1$

30. Im Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange findet man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} \qquad \text{für} \qquad b \geq a > 0.$$

Mit der Substitution $t = ax$ bzw. $t = bx$ folgt

$$\ln\frac{b}{a} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = 0.$$

Wo liegt der Grund für diese Absurdität?

(a) Die Substitutionsregel wurde falsch angewandt.

(b) Die beiden letzten Integrale divergieren.

(c) Daran ist nichts falsch. Aus $\ln\frac{b}{a} = 0$ folgt $a = b$.

31. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y' + y^2 + x = 0$

(b) $y'^2 + y + x = 0$

(c) $y' + x^2 y = 0$

(d) $y' + xy^2 = 0$

32. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y = xy' + (y')^2$

(b) $\dfrac{y'}{1 - x^2} + \dfrac{y}{1 + x} = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $(y' - 2)^2 = y$

(d) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

33. Die Differentialgleichung

$$y' = \ln(x + 1)y + \ln(x + 1)$$

geht durch Trennen der Variablen über in

(a) $yy' = \ln(x + 1)$.

(b) $\dfrac{y'}{y} = \ln(x + 1) + 1$.

(c) $yy' = \ln(x + 1)^2$.

(d) $\dfrac{y'}{y + 1} = \ln(x + 1)$.

34. Die Differentialgleichung $y' = x^2 + 2xy + y^2$

(a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

35. Die Differentialgleichung $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} + \sin \frac{y}{x}$

(a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

36. Die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$

(a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

37. Unter dem *Prinzip der Variation der Konstanten* für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung versteht man

(a) die Tatsache, dass die Lösung einer solchen Differentialgleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

(b) die Art, wie die Lösung von den in einer solchen Differentialgleichung vorkommenden Konstanten abhängt.

(c) das Verfahren, zuerst die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung zu bestimmen und danach die Integrationskonstante zu berechnen, welche die gegebene Anfangsbedingung garantiert.

(d) den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot y_h(x)$ für eine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen Gleichung und einer noch zu bestimmenden Funktion $C(x)$.

38. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differentialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

(a) besitzt die Funktion $y(x) = x$ als Lösung.

(b) besitzt die Funktion $y(x) = x^2$ als Lösung.

(c) besitzt unendlich viele Lösungen.

(d) besitzt genau zwei Lösungen.

39. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(d) Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

40. Die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2\,y(x) + \sin x, \qquad y(0) = 1,$$

erfüllt

(a) $4\,y(2\pi) = 5\,e^{6\pi} - 1$.

(b) $5\,y(2\pi) = 6\,e^{4\pi} - 1$.

(c) $6\,y(2\pi) = 4\,e^{5\pi} - 1$.

41. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y''+3y'+2y = 0$ ist **falsch**?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

(d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to \infty$.

(e) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to -\infty$.

42. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y''+3y'+2y = 0$ ist **falsch**?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

(d) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

43. A habe die Eigenwerte 0 und 1 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = c_1 e^t + c_2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = e^{c_1 t} - 2\, e^{c_2 t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

44. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t grösser als 10 wird.

(b) $|\vec{x}(t)|$ auch für beliebig grosse t kleiner als 10 bleibt.

(c) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t kleiner als $\frac{1}{10}$ wird.

45. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

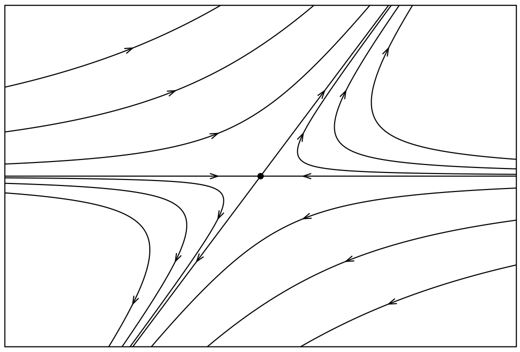
(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

(b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

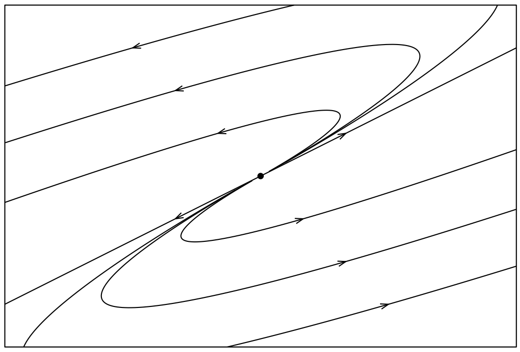
(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

46. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

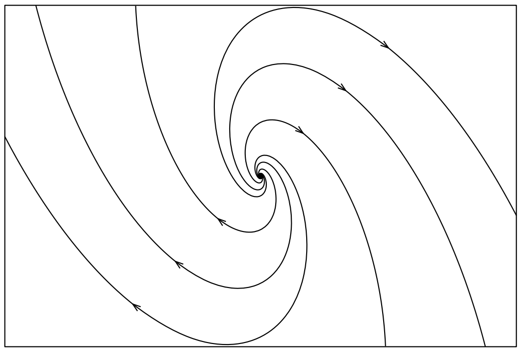
(a)



(b)



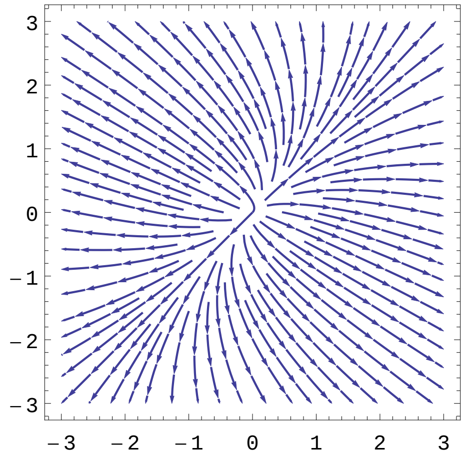
(c)



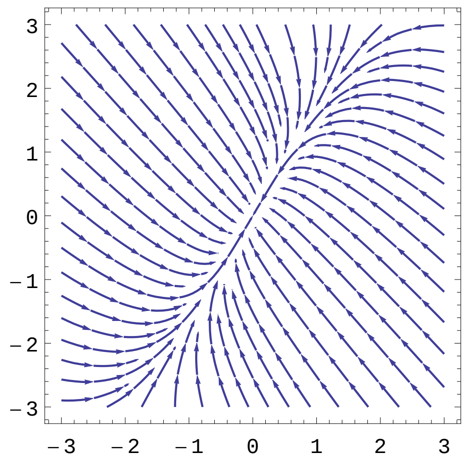
47. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\ ?$$

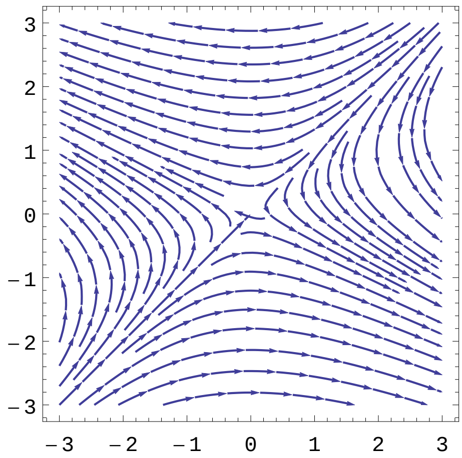
(a)



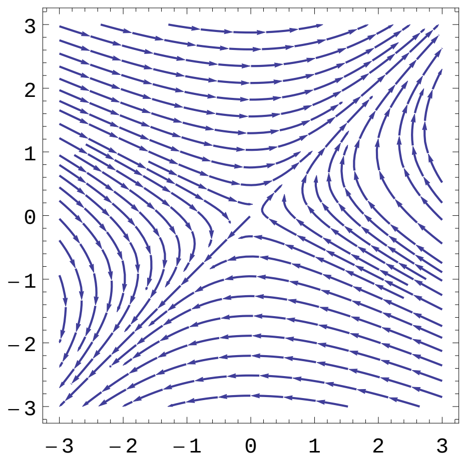
(b)



(c)



(d)



48. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0$$

(wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) ist korrekt?

(a) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

(b) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x$.

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^x + C_2$.

49. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' - \omega^2 y = 0 \text{ (mit } \omega \neq 0 \text{ konstant)}$$

ist korrekt?

(a) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 x e^{-\omega x}.$$

(b) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

(c) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

50. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

(a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

(e) Keine.