D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 13
Dr. Ana Cannas

Serie 2: Inverse Matrizen und Determinanten

Hinweis: Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2**, Kapitel I

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1, 3-11 (S. 148-151),
- zu Abschnitt 4 die Übungsaufgaben 2, 3, 9 und 10 (S. 152-153),
- Zu Abschnitt 5 die Übungsaufgaben 1-9, 12 (S. 154-156).

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA und vergleichen Sie diese.

b) Berechnen Sie die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ und vergleichen Sie diese.

c) Berechnen Sie die Determinanten von A, C und AC und vergleichen Sie diese.

d) Welche der Produkte AD, AD^{T}, DA, $D^{\mathrm{T}}A$ sind definiert? Berechnen Sie diese.

2. **a)** Finden Sie alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$ und $A^{-1} = A$.

b) Für welche Werte der Konstanten a, b und c ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

c) Betrachten Sie die obere Dreiecksmatrix (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

und beantworten Sie folgende Fragen.

Bitte wenden!

(i) Für welche Werte von a, b, c, d, e und f ist A invertierbar?

(ii) Allgemeiner, wann ist eine obere Dreiecksmatrix von beliebiger Dimension invertierbar?

(iii) Wenn eine obere Dreiecksmatrix invertierbar ist, ist dann ihr Inverses auch eine obere Dreiecksmatrix? Experimentieren Sie mit (2×2)- und (3×3)-Matrizen.

(iv) Wann ist eine **untere** Dreiecksmatrix invertierbar?

3. Eine oft effiziente Methode zur Berechnung von Determinanten besteht darin, direkt die Eigenschaften zu verwenden, die Determinanten auszeichnen (vgl. Vorlesung).

a) Es sei etwa $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 12 & 16 \\ 3 & 12 & 22 \end{vmatrix}$ zu berechnen. Die Idee ist, die Determinante durch Zeilenoperationen bis auf Faktoren in die Form $\begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix}$ zu bringen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 12 & 16 \\ 3 & 12 & 22 \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 12 & 16 \\ 3 & 12 & 22 \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 12 & 22 \end{vmatrix} \overset{(c)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(d)}{=} 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 13 \end{vmatrix} \overset{(e)}{=} 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{(f)}{=} 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 84.$$

Erklären Sie, was in den Schritten (a) - (f) jeweils passiert.

b) Wenden Sie die oben beschriebene Methode auf $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ an.

4. **a)** Berechnen Sie die Inversen der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $A^{-1}A$ und AA^{-1} berechnen.

Siehe nächstes Blatt!

d) Bestimmen Sie die Lösung $\vec{x}$ des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$.

5. Eine reelle $n \times n$-Matrix A, $n \in \mathbb{N}^*$, heisst *orthogonal*, wenn die zu A inverse Matrix A^{-1} gleich der Transponierten A^T ist, d.h. wenn $AA^T = A^T A = E_n$.

a) Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

sind orthogonal?

b) Zeigen Sie, dass eine quadratische reelle Matrix genau dann orthogonal ist, wenn ihre Spalten paarweise orthogonale Vektoren der Länge 1 sind.

c) Es sei A eine orthogonale $n \times n$-Matrix,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

i) die Vektoren $\vec{v}$ und $A\vec{v}$ haben die selbe Länge.
Hinweis: Es gilt $|A\vec{v}|^2 = (A\vec{v}) \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{v})^T\,(A\vec{v})$.

ii) die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bzw. $A\vec{v}$ und $A\vec{w}$ schliessen den selben Winkel ein.
Hinweis: Für den Kosinus des Winkels φ, der von $A\vec{v}$ und $A\vec{w}$ eingeschlossen wird, gilt $\cos\varphi\ |A\vec{v}|\ |A\vec{w}| = (A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = (A\vec{v})^T\,(A\vec{w})$.

d) Zeigen Sie, dass für eine orthogonale Matrix A stets $\det A = \pm 1$ gilt.