Serie 3: Basis und Dimension

Hinweis: Als „Aufwärmübung" empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2**, Kapitel I

- Zu Abschnitt 5 die Übungsaufgaben 1-9, 12-18 (S. 154-158).

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen W einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ darstellen.

a)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 1 \right\}$$

b)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \leq y \leq z \right\}$$

c)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} \mid x, y, z \text{ beliebige Konstanten} \right\}$$

2. Für welche Werte der Konstanten a, b, c, d, e und f sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

3. Sei V ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren das **orthogonale Komplement** $V^\perp$ von V als die Menge derjenigen Vektoren $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, die senkrecht auf alle Vektoren in V stehen; das heisst

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0, \text{ für alle } \vec{v} \text{ in } V.$$

a) Zeigen Sie, dass $V^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Betrachten Sie die Gerade L aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Finden Sie eine Basis von $L^\perp$.

4. **a)** Bestimmen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Werte der Konstanten k bilden die unteren Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}.$$

5. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ -5+s \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

b) Bestimmen Sie Rang und Determinante der Koeffizientenmatrix A.

c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$.