D-ERDW, D-HEST, D-USYS — Mathematik I — HS 13
Dr. Ana Cannas

Serie 4: Eigenwerte und Eigenvektoren

Hinweis:

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2** Kapitel I

- zu Abschnitt 7 die Übungsaufgaben 1, 3, 10-13, 15 und 17 (S. 160-162)
  Hinweis: Die Matrizen in Aufgabe 15 besitzen den Eigenwert 2 und die Matrix in Aufgabe 17 besitzt einen dreifachen Eigenwert.

1. Lösen Sie für folgende Matrizen das Eigenwertproblem. Das heisst finden Sie alle reellen Eigenwerte und bestimmen Sie dann eine Basis für alle Eigenräume. Des Weiteren, bestimmen Sie eine Eigenbasis, falls es eine gibt.

a) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **n)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **o)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Bitte wenden!

2. Wir betrachten die vom Parameter a abhängigen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a) Für welche(n) Wert(e) von a ist die Matrix A regulär (d.h. invertierbar)?

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass -2 ein Eigenwert von A ist und geben Sie dann auch die übrigen Eigenwerte von A an.

c) Bestimmen Sie a so, dass $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ ein Eigenvektor von A ist.

3. Die folgende „Kaninchenaufgabe“ geht auf Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, zurück. Die Zahlen F_n, $n \in \mathbb{N}$, sind die berühmten *Fibonacci-Zahlen*.

Angenommen, neugeborene Kaninchenpaare werden nach einem Monat geschlechtsreif und bringen danach jeden Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Anfänglich existiere ein neugeborenes Paar. Wieviele Kaninchenpaare F_n gibt es nach einer vorgegebenen Anzahl n von Monaten?

a) Berechnen Sie die Anzahl neugeborener Kaninchenpaare für die ersten paar Monate und finden Sie eine allgemeine *Rekursionsformel*, d.h. eine Formel, mit der sich die Zahl F_n aus den schon bekannten Zahlen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ berechnen lässt.

b) Setzen Sie $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\vec{x}_{n+1} = A\,\vec{x}_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{$\star$}$$

mit einer Matrix A.

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.

c) Wegen ($\star$) gilt $\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Bestimmen Sie damit die Zahl in F_n in *geschlossener Form*, d.h. finden Sie eine Formel für F_n, die die Zahlen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ nicht enthält.

4. Betrachten Sie folgendes Modell, das die Interaktion der Population von Füchsen und Hasen **rekursiv** beschreibt:

$$\begin{aligned} h\left(t+1\right) &= 4h\left(t\right) - 2f\left(t\right) \\ f\left(t+1\right) &= h\left(t\right) + f\left(t\right), \end{aligned}$$

wobei h die Population der Hasen und f die Population der Füchse darstellt.
Finden Sie explizite Formeln für $h\left(t\right)$ und $f\left(t\right)$ für folgende Anfangswerte.

a) $h\left(0\right) = f\left(0\right) = 100.$

b) $h\left(0\right) = 200,\ f\left(0\right) = 100.$

c) $h\left(0\right) = 600,\ f\left(0\right) = 500.$

5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte - reell oder komplex. Ermitteln Sie dann eine Basis jedes Eigenraumes und bestimmen Sie falls möglich eine Eigenbasis.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$