

Mathematik III

Herbst 2013

Gesundheitswissenschaften und Technologie Bachelor
Mathematik DZ
und Mathematik Lehrdiplom

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 0: Wiederholung - Gewöhnliche Differentialgleichungen

23. September 2013

30. September 2013

- 1 Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 3 Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Definition

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekanntem Funktion $y = y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten, heisst eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung*.

Anmerkung

- Sie ist daher in der *impliziten* Form

$$F(x; y; y'; \dots; y^{(n)}) = 0$$

oder, falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ auflösbar ist, in der *expliziten* Form

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; \dots; y^{(n-1)})$$

darstellbar.

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Beispiele

$$y' = 2x$$

Explizite Dgl 1. Ordnung

$$x + yy' = 0$$

Implizite Dgl 1. Ordnung

$$y' + yy'' = 0$$

Implizite Dgl 2. Ordnung

$$\ddot{s} = -g$$

Explizite Dgl 1. Ordnung

$$y''' + 2y'' = \cos(x)$$

Implizite Dgl 3. Ordnung

$$y^{(6)} - y^{(4)} + y'' = e^x$$

Implizite Dgl 6. Ordnung

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Definition

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Wir unterscheiden dabei noch zwischen der *allgemeinen* Lösung und der *speziellen* oder *partikulären* Lösung:

- Die *allgemeine* Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige *Parameter* (Integrationskonstanten).
- Eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund *zusätzlicher* Bedingungen den n Parametern *feste* Werte zuweist.
Dies kann beispielsweise durch *Anfangsbedingungen* oder durch *Randbedingungen* geschehen.

Beispiele

- Die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2x$$

erhalten wir durch *unbestimmte Integration*:

$$y = \int y' \cdot dx = \int 2x \cdot dx = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

- Die *harmonische Schwingung* eines elastischen Federpendels lässt sich bekanntlich durch eine Sinusfunktion vom Typ

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

beschreiben.

Wir differenzieren die Funktion $x(t)$ *zweimal* nach der Zeit und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \ddot{x} &= -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\omega_0^2 x\end{aligned}$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Anfangswertproblem*, auch *Anfangswertaufgabe* genannt, werden der Lösungsfunktion $y = y(x)$ insgesamt n Werte, nämlich der *Funktionswert* sowie die Werte der $n - 1$ *Ableitungen* an einer Stelle x_0 , vorgeschrieben: $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$.
- Wir bezeichnen sie als *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen*.
- Sie führen zu n *Bestimmungsgleichungen* für die Parameter C_1, C_2, \dots, C_n .

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Dgl 1. Ordnung:** Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft.
- Dgl 2. Ordnung:** Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft und dort die vorgegebene *Steigung* $y'(x_0) = m$ besitzt.

Anfangswert- und Randwertprobleme

Beispiel

- Wir lösen die *Anfangswertaufgabe*

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1 :$$

Allgemeine Lösung: $y = \int y' dx = \int 2x dx = x^2 + C$

Bestimmung des Parameters: $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Gesuchte spezielle Lösung: $y(x) = x^2 + 1$

- Das *Anfangswertproblem*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad (x_0 > 0)$$

beschreibt die *hamonische Schwingung* eines elastischen *Federpendels*.

Die allgemeine Lösung lautet dann :

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (A > 0; 0 \leq \phi < 2\pi)$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Die Parameter A und ϕ bestimmen wir aus den beiden *Anfangswerten* wie folgt:

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 &\Rightarrow A \cdot \sin(\phi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 &\Rightarrow \omega_0 A \cos(\phi) = 0 \\ &\Rightarrow \phi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}\end{aligned}$$

Wegen $A > 0$ und $x_0 > 0$ ist auch $\sin(\phi) > 0$.

Der gesuchte Phasenwinkel liegt daher im Intervall $0 < \phi < \pi$.

Es kommt somit nur die Lösung $\phi = \pi/2$ in Frage.

Dann folgt $A = x_0$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\end{aligned}$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Randwertproblem*, auch *Randwertaufgabe* genannt, werden der gesuchten *speziellen* Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung an n verschiedenen Stellen x_1, x_2, \dots, x_n der Reihe nach die Funktionswerte $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ vorgeschrieben.
- Sie werden als *Randwerte* oder *Randbedingungen* bezeichnet und führen wiederum zu n *Bestimmungsgleichungen* für die n Parameter C_1, C_2, \dots, C_n der allgemeinen Lösung.
- Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung bedeutet dies: die Lösungskurve ist so zu bestimmen, dass sie durch *zwei* vorgegebene Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ verläuft.
- Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass nicht *jedes* Randwertproblem lösbar ist.
- In bestimmten Fällen können auch *mehrere* Lösungen auftreten.

Geometrische Betrachtungen

Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ besitze die Eigenschaft, dass durch *jeden* Punkt des Definitionsbereiches von $f(x; y)$ *genau* eine Lösungskurve verlaufe. $P_0 = (x_0; y_0)$ sei ein solcher Punkt und $y = y(x)$ die durch P_0 gehende *Lösungskurve*.

Die Steigung m der Kurventangente in P_0 kann dann auf *zwei* verschiedene Arten berechnet werden:

- Aus der (als bekannt vorausgesetzten) *Funktionsgleichung* $y = y(x)$ der Lösungskurve durch Differentiation nach der Variablen x : $m = y'(x_0)$;
- Aus der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ selbst, indem man in diese Gleichung die Koordinaten des Punktes P_0 einsetzt: $m = f(x_0; y_0)$.

Es gilt somit

$$m = y'(x_0) = f(x_0; y_0)$$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \text{mit } g \neq 0 \text{ heisst separabel und lässt sich}$$

$$\text{durch "Trennung der Variablen" lösen: } \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

"Trennung der Variablen"

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

- 1 *Trennung* der beiden Variablen.
- 2 Integration auf *beiden* Seiten der Gleichung.
- 3 Auflösung der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls überhaupt möglich).

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Beispiel

- Die Anfangswertaufgabe

$$x + yy' = 0, \quad y(0) = 2$$

lösen wir durch *Trennung der Variablen*.

- Trennung der Variablen:*

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \, dy = -x \, dx$$

- Integration:*

$$\int y \, dy = \int x \, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

- Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:*

$$y^2 = 2C - x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2C$$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

- Dies ist die Gleichung eines *Mittelpunktkreises* mit dem Radius $R = \sqrt{2C}$, falls $C > 0$ ist.
Für $C = 0$ erhalten wir den *Nullpunkt*, für $C < 0$ existieren *keine* Lösungen.
- *Spezielle Lösung* für $y(0) = 2$

$$\begin{aligned}y(0) = 2 &\Rightarrow C = 2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 4\end{aligned}$$

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad (\text{Substitution: } u = ax + by + c)$$

und

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Substitution: } u = \frac{y}{x})$$

lassen sich mittels der jeweils in Klammern angegebenen *Substitution* schrittweise wie folgt lösen:

- 1 Durchführung der *Substitution*.
- 2 *Integration* der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch *Trennung der Variablen*.
- 3 *Rücksubstitution* und *Auflösen* der Gleichung nach y .

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Beispiel

- Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{x + 2y}{x} = 1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)$$

ist vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ und lässt sich daher durch die *Substitution* $u = \frac{y}{x}$ wie folgt lösen:

- Substitution:*

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{d.h.} \quad y = xu, \quad y' = u + xu'$$

$$y' = 1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right) \Rightarrow u + xu' = 1 + 2u \quad \text{oder} \quad xu' = 1 + u$$

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

- *Integration durch Trennung der Variablen:*

$$\begin{aligned}x \frac{du}{dx} = 1 + u &\Rightarrow \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C'| \\ &\Rightarrow u+1 = Cx \quad C = \pm C'\end{aligned}$$

- *Rücksubstitution:*

$$y = xu = x(Cx - 1) = Cx^2 - x$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{x+2y}{x}$ besitzt somit die Gestalt

$$y = Cx^2 - x \quad (C \in \mathbb{R})$$

Definition einer linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

Anmerkung

- Die Funktion $g(x)$ wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet.
Fehlt das *Störglied*, d.h. ist $g = 0$, so heisst die lineare Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Definition: lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Beispiel

- Die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind *linear*:

$$y' - xy = 0 \quad \text{Homogene Dgl}$$

$$xy' + 2y = e^x \quad \text{Inhomogene Dgl}$$

$$y' + \tan(x) \cdot y = 2\sin(2x) \quad \text{Inhomogene Dgl}$$

- Nicht-linear* sind folgende Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = 1 - y^2 \quad (y \text{ tritt in der 2. Potenz auf})$$

$$yy' + x = 0 \quad (\text{Die Differentialgleichung enth\u00e4lt ein Produkt } yy')$$

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.

Die *allgemeine* Lösung ist dann in der Form

$$y = C \cdot \exp\left(-\int f(x)dx\right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

darstellbar.

Beispiele

- $y' + \frac{1}{x^2}y = 0 (x \neq 0)$ lässt sich lösen:

$$y = C \cdot \exp\left(\int \frac{-1}{x^2} dx\right) = C \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $y' - 2xy = 0, \quad y(0) = 5$ lässt sich lösen:

$$\begin{aligned} y &= C \cdot \exp\left(\int 2x dx\right) \\ &= C \cdot \exp\left(x^2\right) \\ &= 5 \cdot \exp\left(x^2\right) \quad \text{mit } y(0) = 5 \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch "Variation der Konstanten"

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch "Variation der Konstanten" schrittweise wie folgt lösen:

- *Integration* der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = 0$ durch *Trennung der Variablen*:

$$y_0 = K \cdot \exp\left(-\int f(x) dx\right)$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch "Variation der Konstanten"

- *Variation der Konstanten*: die Integrationskonstante K wird durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt. Den Lösungsansatz

$$y = K(x) \cdot \exp\left(-\int f(x)dx\right)$$

setzt man dann in die *inhomogene* lineare Differentialgleichung ein und erhält eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung für die Faktorfunktion $K(x)$, die durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden kann.

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Beispiele



$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Differentialgleichung durch *Trennung der Variablen*.

Die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} y &= K \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) \\ &= \frac{K}{x} \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch *Variation der Konstante* ($K \rightarrow K(x)$)

$$y = \frac{K(x)}{x}, \quad y' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} \\ &= \frac{K'(x)}{x} \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\frac{K'(x)}{x} = \cos(x)$$

Durch *unbestimmte Integration* folgt hieraus:

$$K(x) = \int x \cdot \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x) + C$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung besitzt damit die *allgemeine* Lösung

$$K(x) = \frac{\cos(x) + x \sin(x) + C}{x}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Beispiel

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

Die zugehörige *homogene* Differentialgleichung

$$y' - 3y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.

Ihre *allgemeine* Lösung ist

$$y_0(x) = K \cdot e^{3x} \quad (K \in \mathbb{R})$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch den Ansatz

$$y = K(x) \cdot e^{3x}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Wir fügen die Termen

$$y = K(x) \cdot e^{3x}, \quad y'(x) = K'(x)e^{3x} + 3 \cdot K(x)e^{3x}$$

in die *inhomogene* Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}y' - 3y &= K'(x)e^{3x} + 3K(x)e^{3x} - 3K(x)e^{3x} = x \cdot e^{4x} \\K'(x)e^{3x} &= x \cdot e^{4x} \quad \text{oder} \quad K'(x) = x \cdot e^x\end{aligned}$$

- Durch *unbestimmte Integration* folgt:

$$K(x) = (x - 1) \cdot e^x + C$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned}y &= K(x) \cdot e^{3x} \\&= [(x - 1) \cdot e^x + C] \cdot e^{3x}\end{aligned}$$

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als *Summe* aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Homogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = 0$ ($a \neq 0$)

Die *homogene* lineare Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$y_0 = C \cdot e^{-ax} \quad (C \in \mathbb{R})$$

- **Inhomogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = g(x)$ ($a \neq 0$)

Die *inhomogene* Differentialgleichung wird entweder durch *Variation der Konstanten* oder durch *Aufsuchen einer partikulären Lösung* gelöst.

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$ Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0, c_0 \in \mathbb{R}$
Polynom vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ <i>Parameter:</i> c_0, c_1, \dots, c_n

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$ Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ <p>oder</p> $y_p(x) = C \cdot \sin(\omega x + \phi)$ <p>Parameter: C_1, C_2 bzw. C, ϕ</p>
$g(x) = A \cdot \exp(bx)$	$y_p(x) = \begin{cases} C \cdot \exp(bx) & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot \exp(bx) & \text{für } b = -a \end{cases}$ <p>Parameter: C</p>

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel



$$y' + 5y = -26 \cdot \sin(x), \quad y(0) = 0$$

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 5y = 0$:

$$y_0 = C \cdot e^{-5x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Eine partikuläre Lösung für die *inhomogene* Differentialgleichung ist

$$y_p = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)$$

Bestimmung der *Parameter* C_1 und C_2 :

$$y_p' = C_1 \cdot \cos(x) - C_2 \cdot \sin(x)$$

$$y_p' + 5y_p = -26 \cdot \sin(x)$$

- Ordnen der Glieder:

$$(5C_1 - C_2) \cdot \sin(x) + (C_1 + 5C_2) \cdot \cos(x) = -26 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem *linearen Gleichungssystem*

$$5C_1 - C_2 = -26$$

$$C_1 + 5C_2 = 0$$

Es folgt dann

$$C_2 = 1$$

$$C_1 = -5$$

Die *partikuläre* Lösung ist damit eindeutig bestimmt:

$$y_p(x) = -5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet somit:

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Den Parameter C berechnen wir wie folgt aus dem *Anfangswert* $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$$

Die *Anfangswertaufgabe* besitzt demnach die *Lösung*

$$y = y_0 + y_p = -e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

heißt eine *lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ($a, b \in \mathbb{R}$).

Anmerkungen

- Kennzeichen einer *linearen* Differentialgleichung 2. Ordnung sind:
 - y , y' und y'' treten *linear*, d.h. in der 1. Potenz auf.
 - "Gemischte Produkte" wie yy' , yy'' und $y'y''$ sind in der Differentialgleichung *nicht* enthalten.

Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiele

- Die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung sind *linear* und besitzen *konstante* Koeffizienten:

$$y + y'' = 0$$

Homogene Dgl

$$y'' + 2y' - 3y = 2x - 4$$

Inhomogene Dgl

$$2y'' - 4y' + 20y = \cos(x)$$

Inhomogene Dgl

- Die Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \text{und} \quad x^3 y'' + x^2 y' - xy = e^x$$

sind zwar *linear*, besitzen jedoch *nicht-konstante* Koeffizienten.

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

besitzt folgende Eigenschaften:

- Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch die mit einer *beliebigen* Konstanten C multiplizierte Funktion

$$y(x) = C \cdot y_1(x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung ($C \in \mathbb{R}$).

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei *Lösungen* der Differentialgleichung, so ist auch die aus ihnen gebildete *Linearkombination*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

- Ist $y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ eine *komplexwertige Lösung* der Differentialgleichung, so sind auch *Realteil* $u(x)$ und *Imaginärteil* $v(x)$ *Lösungen* der Gleichung.

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Beispiel

- Gegeben ist die sog. *Schwingungsgleichung*

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Partikuläre Lösungen sind u.a:

$$y_1 = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2 = \cos(\omega x)$$

Für $y_1 = \sin(\omega x)$:

$$y_1'' = (\omega \cdot \cos(\omega x))' = -\omega^2 \cdot \sin(\omega x) \quad \Rightarrow \quad y_1'' + \omega^2 \cdot y_1 = 0$$

Damit sind auch die folgenden Funktionen *Lösungen* der Schwingungsgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Definition

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

werden als *Basisfunktionen* oder *Basislösungen* der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete sog. *Wronski-Determinante*

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Anmerkung

- Zwei *Basislösungen* $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der *homogenen Differentialgleichung* werden auch als *linear unabhängige* Lösungen bezeichnet, d.h.

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

ist als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Lösungen (*Basislösungen*) $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ in der Form

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

darstellbar ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Beispiel

- Die *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ hat u.a. die Lösungen

$$y_1(x) = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \cos(\omega x)$$

Sie bilden eine *Fundamentalebasis* der Differentialgleichung, da ihre Wronski-Determinante einen *von Null verschiedenen* Wert besitzt:

$$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\omega \sin(x) & \omega \cos(\omega x) \end{vmatrix} \\ &= \omega \cdot \cos^2(\omega x) + \omega \cdot \sin^2(\omega x) \\ &= \omega \end{aligned}$$

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- Die *allgemeine* Lösung der *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ ist daher darstellbar in der Form

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \\ &= C_1 \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x)\end{aligned}$$

- Die *homogene* Differentialgleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$ besitzt u.a. die Lösungen

$$y_1(x) = e^{5x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Sie bilden eine *Fundamentalebasis* der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 5e^{5x} & -e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -6e^{4x}\end{aligned}$$

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Mit dem Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ lässt sich eine *Fundamentbasis* y_1, y_2 der *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

gewinnen.

Die *Basislösungen* hängen dabei noch von der *Art* der Lösungen λ_1, λ_2 der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$):

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)**

Fundamentalebasis: $y_1 = \exp(\lambda_1 x), \quad y_2 = \exp(\lambda_2 x)$

Allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 x)$

- **Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)**

Fundamentalebasis: $y_1 = \exp(cx), \quad y_2 = x \cdot \exp(cx)$

Allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot \exp(cx) + C_2 \cdot x \cdot \exp(cx)$

- **Fall $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)**

Fundamentalebasis: $y_1 = \exp(\alpha x) \cdot \sin(\omega x), \quad y_2 = \exp(\alpha x) \cdot \cos(\omega x)$

Allgemeine Lösung: $y = \exp(\alpha x) [C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)]$

Beweis:

- Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit

$$y = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

gehen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten die folgende *quadratische* Bestimmungsgleichung für den Parameter λ :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \cdot \exp(\lambda x) + b \cdot \exp(\lambda x) = 0 \\(\lambda^2 + a\lambda + b) \cdot e^{\lambda x} &= 0, \quad \forall \exp(\lambda x) \\(\lambda^2 + a\lambda + b) &= 0\end{aligned}$$

Sie wird als *charakteristische Gleichung* der homogenen Gleichung $y'' + ay' + by = 0$ bezeichnet und besitzt die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

ist als Summe aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$ Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Polynomfunktion Grade n $g(x) = \mathcal{P}_n(x)$	vom $y_p = \begin{cases} \mathcal{Q}_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot \mathcal{Q}_n(x) & \text{für } b = 0, a \neq 0 \\ x^2 \cdot \mathcal{Q}_n(x) & b = 0, a = 0 \end{cases}$ $\mathcal{Q}_n(x)$: Polynom vom Grade n <i>Parameter</i> : Koeffizienten des Polynoms $\mathcal{Q}_n(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$ Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
<p>Exponentialfunktion</p> $g(x) = e^{cx}$ <p>Parameter: A</p>	<ul style="list-style-type: none"> c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ c ist eine <i>einfache</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ c ist eine <i>doppelte</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$	$j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ <i>Parameter:</i> A, B oder C, ϕ

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$ Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
<p>Sinusfunktion</p> $g(x) = \sin(\beta x)$ <p>oder Kosinusfunktion</p> $g(x) = \cos(\beta x)$ <p>oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$</p>	<p>$j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung:</p> $y_p = x [A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ <p>oder</p> $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$ <p>Parameter: A, B oder C, ϕ</p>

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ (P_n Polynomfunktion vom Grade n)	$c + j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = e^{cx} [Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x)]$ Q_n, R_n : Polynom vom Grade n <i>Parameter</i> : Koeffizienten der Polynome Q_n und R_n

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ (P_n Polynomfunktion vom Grade n)	$c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x \cdot e^{cx} [Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x)]$ Q_n, R_n : Polynom vom Grade n <i>Parameter</i> : Koeffizienten der Polynome Q_n und R_n