3.4 Systeme linearer Differentialgleichungen

Die Untersuchung der Normalformen von Matrizen soll nun auf die Lösung von Differentialgleichungssystemen angewendet werden. Unter einem *System gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* versteht man ein System von Gleichungen folgender Form:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) & = & a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \\ & \vdots & \\ y_n'(t) & = & a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) \end{array}$$

Dabei sind a_{ij} vorgegebene Zahlen und $y_1, \ldots, y_n$ sind gesuchte differenzierbare Funktionen in der Variablen $t \in \mathbb{R}$. Wir können die Koeffizienten a_{ij} zu einer $n \times n$-Matrix A zusammenfassen, und $y_1, \ldots, y_n$ als Komponenten einer vektorwertigen Funktion $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Sind alle Komponenten y_i der Funktion Y differenzierbar, nennen wir auch Y differenzierbar und setzen

$$Y'(t) := \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für das Differentialgleichungssystem folgende kompakte Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad Y'(t) = A \cdot Y(t)\,.$$

Schauen wir uns zunächst den Fall an, in dem A Diagonalform hat. Sei also $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Das zugehörige Gleichungssystem ist dann:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) & = & \lambda_2 y_2(t) \\ & \vdots & \\ y_n'(t) & = & \lambda_n y_n(t) \end{array}$$

Die Gleichungen sind also eigentlich entkoppelt, und die Lösungen lauten, wie wir aus dem Fall $n = 1$ bereits wissen:

$$y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ frei wählbar. Wenden wir uns nun wieder der allgemeinen Situation zu.

3.40 Bemerkung *Die Lösungsmenge* $\mathbb{L} = \{Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid Y'(t) = A \cdot Y(t)\}$ *eines linearen Differentialgleichungssystems bildet einen linearen Unterraum des Vektorraums* $\mathcal{V}$ *aller differenzierbaren Funktionen von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}^n$*. Denn sind* Y_1, Y_2 *Lösungen, so auch* $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Wie wir später zeigen werden, hat jedes Anfangswertproblem in diesem Zusammenhang eine eindeutige Lösung:

3.41 Satz *Seien* $A \in M_{n\times n}$*,* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$ *gegeben. Das Differentialgleichungssystem* $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ *hat genau eine Lösung* $Y \in \mathcal{V}$ *zur Anfangsbedingung* $Y(t_0) = Y_0$*.*

3.42 Folgerung *Der Lösungsraum* $\mathbb{L}$ *der Differentialgleichung* $Y'(t) = A \cdot Y(t)$*, gegeben durch eine* $n \times n$*-Matrix* A*, hat die Dimension* n*.*

Beweis. Die Zuordung $\mathbb{L} \to \mathbb{R}^n$, $Y \mapsto Y(0)$, definiert durch Auswertung an der Stelle $t = 0$, ist linear und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen sogar bijektiv. Also handelt es sich um einen Vektorraumisomorphismus und daraus folgt $\dim \mathbb{L} = n$. q.e.d.

Eine Basis des Lösungsraums $\mathbb{L}$ wird in diesem Zusammenhang als *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung bezeichnet. Zum Beispiel können wir im oben angegebenen Fall eines entkoppelten Systems, definiert durch eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, als Fundamentalsystem folgende Lösungen wählen:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad Y_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Diese n Lösungen sind linear unabhängig, denn es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\det(Y_1(t), \ldots, Y_n(t)) = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \cdots e^{\lambda_n t} = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} > 0\,.$$

3.43 Satz *(a) Ist* v *ein Eigenvektor zum Eigenwert* λ *der Matrix* A*, so ist* $Y(t) = e^{\lambda t} v$ *eine Lösung des Differentialgleichungssystems* $Y'(t) = A \cdot Y(t)$*.*
(b) Ist $A \in M_{n\times n}$ *diagonalisierbar, und sind* $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängige Eigenvektoren von* A *zu den Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, so bilden die vektorwertigen Funktionen*

$$Y_k(t) := e^{\lambda_k t} v_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem des Systems $Y'(t) = A \cdot Y(t)$*.*

3.44 Beispiel Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 4y_2(t) \end{aligned}$$

Dann ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Für diese Matrix sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 5$ bzw. $\lambda_2 = 2$ von A. Die Funktionen

$$Y_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

bilden ein Fundamentalsystem von $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, wie man durch Einsetzen überprüfen kann.

Beweis des Satzes: (a) Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt $A(e^{\lambda t} v) = e^{\lambda t}(Av) = e^{\lambda t} \lambda v$. Andererseits ist $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} v) = \lambda e^{\lambda t} v$. Also löst $Y(t) = e^{\lambda t} v$ das Differentialgleichungssystem.
(b) Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass die Funktionen Y_k jeweils Lösungen sind. Diese Lösungen sind auch linear unabhängig, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det(Y_1(t), \ldots, Y_n(t)) = \det(e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n) = e^{\lambda_1 t} \cdots e^{\lambda_n t} \det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\,.$$

q.e.d.

Im Allgemeinfall können wir die Lösungen mithilfe der Exponentialabbildung von Matrizen beschreiben. Man definiert in Analogie zur gewöhnlichen Exponentialfunktion für eine quadratische Matrix A und $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} := E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!} A^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\,.$$

Für jede beliebige Matrix A konvergiert diese Reihe und zwar gegen eine Matrix von demselben Typ wie A. Ausserdem gelten ähnliche Rechenregeln wie für die Exponentialfunktion, nämlich zum Beispiel:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA} \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R},\ A \in M_{n \times n}.$$

3.45 Beispiele

- Ist $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dann ist $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\lambda_1 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k \end{pmatrix} + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt durch Induktion $B^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit erhält man:

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & 2\frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \ldots + \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!} & k\frac{t^k}{k!} \\ 0 & \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} .$$

- Für $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ gilt: $\qquad e^{tC} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Sei $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Dann ist $\quad e^{tD} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$.
  (siehe Übungsaufgabe).

3.46 Satz *Seien $A \in M_{n\times n}$ und $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Das Differentialgleichungssystem $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ zur Anfangsbedingung $Y(0) = Y_0$ hat genau eine Lösung $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, nämlich*

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem.

Beweis. Wir rechnen zunächst nach, dass die angegebene Funktion die Differentialgleichung löst. Einerseits ist

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \frac{d}{dt}((E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \ldots)Y_0) = \\ & A \cdot Y_0 + tA^2 \cdot Y_0 + \frac{t^2}{2}A^3 \cdot Y_0 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \cdot Y_0 . \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$A \cdot Y(t) = A \cdot ((E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \ldots) \cdot Y_0 .$$

Die beiden Ausdrücke stimmen überein, also ist Y eine Lösung. Auch die Anfangsbedingung ist erfüllt, denn für $t = 0$ erhalten wir durch Einsetzen:

$$Y(0) = e^{0\cdot A} \cdot Y_0 = E \cdot Y_0 = Y_0 .$$

Nun zur Eindeutigkeit der Lösung: Nehmen wir an, Y sei irgendeine Lösung der Differentialgleichung mit $Y(0) = Y_0$. Dann folgt aus der Produktregel für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}e^{-tA} \cdot Y(t) = -e^{-tA}A \cdot Y(t) + e^{-tA} \cdot Y'(t) = -e^{-tA}A \cdot Y(t) + e^{-tA}A \cdot Y(t) = 0 .$$

Die Funktion $t \mapsto e^{-tA} \cdot Y(t)$ ist also konstant. Daraus folgt:

$$e^{-tA} \cdot Y(t) = e^{-0\cdot A} \cdot Y(0) = Y_0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten also wie behauptet:

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 .$$

Die j-te Spalte Y_j der Matrix e^{tA} erhält man durch Multiplikation der Matrix mit dem j-ten kanonischen Basisvektor. Also ist Y_j die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $Y_j(0) = e_j$. Ausserdem sind die Spalten $Y_1, \ldots, Y_n$ linear unabhängig, denn es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Spur}(A)} > 0 .$$

Dazu eventuell mehr in den Übungsaufgaben. q.e.d.

3.47 Beispiel • Aus dem letzten Beispiel lesen wir ab: Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $Y'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot Y(t)$ ist gegeben durch die Funktionen

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda}t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix} .$$

• Die Differentialgleichung $Y'(t) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot Y(t)$ hat das Fundamentalsystem

$$Y_1(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \sin(bt) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_2(t) = e^{at} \begin{pmatrix} -\sin(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix} .$$

Die Berechnung der Exponentialmatrix e^{tA} zu vorgegebener Matrix A ist nicht immer einfach. Wenn man die Form der Lösungen eines Differentialgleichungssystems bereits ahnt, kann ein geeigneter Ansatz mit zu bestimmenden Parametern möglicherweise schneller zum Ergebnis führen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir *homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = 0 .$$

Hier sind a_k fest gewählte reelle Zahlen. Eine solche Gleichung lässt sich auf ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Dazu verwenden wir folgenden Trick, wir setzen: $Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$. Erfüllt y die Gleichung (*), so ist Y eine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen und umgekehrt:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t) \\ y_n'(t) &= -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \cdots - a_{n-1} y_n(t) \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A stimmt mit dem Polynom überein, das aus den Koeffizienten a_k gebildet wird:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0 .$$

Dies ergibt sich durch vollständige Induktion über n. Denn für $n = 1$ gilt:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda + a_0 .$$

Sei jetzt $n > 1$. Dann erhalten wir mit der Induktionsannahme durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_0(-1)^{n-1} =$$

$$\lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots a_1) + a_0 = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0 .$$

Man bezeichnet p deshalb auch als das *charakteristische Polynom* der Gleichung (*) und nennt A die dazugehörige *Begleitmatrix*. Da die Lösungsmenge des Systems $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ ein n-dimensionaler Vektorraum ist, gilt dasselbe auch für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Differentialgleichung (*). Eine Basis der Lösungsmenge wird hier wiederum als Fundamentalsystem bezeichnet, und ein Satz von Funktionen $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{L}$, wenn die daraus gebildeten Funktionen

$$Y_1 := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, Y_n := \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n' \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums des entsprechenden Systems erster Ordnung bilden. An der Determinante können wir wiederum ablesen, ob $Y_1, \dots, Y_n$ linear unabhängig sind. Wir erhalten also folgende Aussagen:

3.48 SATZ *Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist ein reeller Vektorraum der Dimension n. Gegebene Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dieser Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die zugehörige* Wronski-Determinante *an einer Stelle $t \in \mathbb{R}$ nicht verschwindet:*

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Wie für homogene lineare Differentialgleichungen 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten können wir auch für den Fall höherer Ordnung konkrete Fundamentalsysteme angeben, und zwar benötigt man dafür lediglich die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und deren Vielfachheiten. Hier das Resultat:

3.49 SATZ *Hat das charakteristische Polynom p nur reelle Nullstellen und zwar $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$, dann bilden die Funktionen*

$$t^k e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, \ldots, r, \quad k = 0, \ldots, m_j - 1)$$

ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung (*). Ist unter den Nullstellen ein Paar komplex konjugierter Zahlen $\lambda = \alpha + i\beta$ und $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ mit Vielfachheit m, so sind

$$t^k e^{\alpha} \cos(\beta t), t^k e^{\alpha} \sin(\beta t) \quad (k = 0, \ldots, m-1)$$

linear unabhängige Lösungen von (*).

Beweis. Diese Aussagen kann man durch Einsetzen und Nachrechnen überprüfen (wie wir das schon im Fall $n = 2$ getan haben). q.e.d.

3.50 BEISPIELE

- Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0\,.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 3$. Also bilden die Funktionen

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-t} \quad y_3(t) = e^{3t}$$

eine Basis des Lösungsraums. Die Begleitmatrix zu p lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ lauten

$$Y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Man kann nachrechnen, dass die hier auftauchenden Vektoren jeweils Eigenvektoren von A zu dem entsprechenden Eigenwert λ_j sind. Wir erhalten also dasselbe Fundamentalsystem wie in Satz 3.43. Die Wronskideterminante lautet hier:

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} e^{3t} = -16e^{3t}.$$

Also ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- Die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 4y = 0$$

hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Die Nullstellen sind hier 2 (doppelt) und -1 (einfach). Also bilden die Funktionen

$$y_1(t) = e^{2t}, \quad y_2(t) = te^{2t} \quad y_3(t) = e^{-t}$$

ein Fundamentalsystem. Die Begleitmatrix lautet hier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Lösungen $Y_j(t) := \begin{pmatrix} y_j(t) \\ y_j'(t) \\ y_j''(t) \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2, 3)$ der Differentialgleichung $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ sind

$$Y_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wieder kann man nachrechnen, dass Y_j tatsächlich Lösungen sind, und die Unabhängigkeit ergibt sich aus:

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 1+2t & -1 \\ 4 & 4+4t & 1 \end{vmatrix} e^{3t} = 9e^{3t} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}..$$