Mathematik III

Herbst 2013

Gesundheitswissenschaften und Technologie Bachelor Mathematik DZ und Mathematik Lehrdiplom

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 2.3: Ergänzungen: Exponential einer Jordan Form, Diagonalisierung
28. Oktober 2013

Allgemeine Hinweise

Die verwendete Folien basieren teilweise auf die im Herbst 2012 verwendete Fassung von Herrn Dr. A. Caspar und Herrn Prof. Dr. N. Hungerbühler

Literatur

- Systemanalyse (D. Imboden, S. Koch)
- Elementary Differential Equations (W. E. Boyce, R. C. DiPrima)
- Einführung in partielle Differentialgleichungen (N. Hungerbühler)

Vor einigen Wochen

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $y' = A \cdot y$ ein homogenes DGL-System.

Der Lösungsraum $\mathcal{L}_A \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist ein n-dimensionaler U-VR.

Um $\mathcal{L}_A$ zu beschreiben, suchen wir eine Basis. Da $\dim \mathcal{L}_A = n$, suchen wir n linear unabhängige Lösungsfunktionen.

Wie im Fall 2×2 gilt:

- Sei v ein EV von A zum EW λ. Dann ist $t \mapsto y(t) = e^{\lambda t} v$ eine Lösung des Systems mit $y(0) = v$.
- Angenommen, A hat n linear unabhängige EV $v_1, ..., v_n$ zu EW $\lambda_1, ...\lambda_n$ (nicht unbedingt alle voneinander verschieden).
  Dann bilden die Funktionen $t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i, i = 1, 2, ..., n$ eine Basis von $\mathcal{L}_A$.

Bestimmung einer Basis von $\mathcal{L}_A$ (I)

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $y' = A \cdot y$ ein homogenes DGL-System.

Wie finden wir eine Basis des Lösungsraum $\mathcal{L}_A \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$?

Günstiger (und häufiger) Fall:
A hat n linear unabhängige EV $v_1, ..., v_n$ zu EW $\lambda_1, ...\lambda_n$, allenfalls mehrfache EW dabei. Dann gilt

- Funktionen $t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i, i = 1, ..., n$ bilden eine Basis von $\mathcal{L}_A$.
- Es gibt eine invertierbare Matrix T, so dass

$$T^{-1}AT = J = D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- In diesem Fall ist JNF J eine Diagonalmatrix und $T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$, d.h. Spalten von T sind EV.
- Die Matrix A heisst dann diagonalisierbar.

Diagonalisierbarkeit

Allgemein gilt:
Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heisst diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt, mit

$$T^{-1}AT = J = D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Äquivalent dazu:

- A hat n linear unabhängige EV $v_1, ..., v_n$ zu EW $\lambda_1, ...\lambda_n$, allenfalls mehrfache EW dabei.
- Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus EV von A (Eigenbasis).
- Die JNF J von A ist eine Diagonalmatrix.

In diesem Fall ist $T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$, d.h. die Spalten von T sind EV von A.

Beispiele Diagonalisierbarkeit

- Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann liefert *Mathematica*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Falls alle EW 1-fach, d.h. λ_i paarweise voneinander verschieden, ist A diagonalisierbar

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & 0 \\ & \lambda_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_{n-1} & 0 \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Falls A symmetrisch / hermitesch $\rightarrow$ nächste Folie

EW / EV eine hermiteschen Matrix (Erinnerung)

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $A = \overline{A}^T$ heisst hermitesch.
Falls alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und $A = A^T$, heisst A symmetrisch.

Für ein solches A gilt:

- Alle n EW von A sind reell.
- Zu einem k-fachen EW gehören k linear unabhängige EV.
- Es gibt insgesamt n linear unabhängige EV, d.h. es gibt eine Eigenbasis des $\mathbb{R}^n$.

Also ist eine symmetrische/hermitesche Matrix immer diagonalisierbar.

Bestimmung einer Basis von $\mathcal{L}_A$ (II)

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $y' = A \cdot y$ ein homogenes DGL-System.

Wie finden wir eine Basis des Lösungsraum $\mathcal{L}_A \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$?

Falls A nicht diagonalisierbar (oder wir darüber nicht entscheiden können), verwende die Exponentialabbildung

$$t \mapsto e^{tA} = E_n + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \ldots.$$

Hauptsatz: Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis von $\mathcal{L}_A$.

Problem: Die Berechnung von e^{tA} in der Regel aufwändig.

Rechenregel für Exponential

Regel zur Berechnung e^{tA}: Mit invertierbarer Matrix T gilt

$$T^{-1}e^{tA}T = e^{T^{-1}(tA)T} = e^{tJ} \implies e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}.$$

Dabei ist die Matrix J möglichst von einer Form mit einfacher Berechnung des Exponentials.

$\rightarrow$ Hauptsatz über Jordan-Normalenform

Jordan-Normalenform

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann existiert eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1}AT = J$ für eine Blockdiagonalmatrix

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$

Jeder Jordan-Block hat die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die λ_i sind die EW von A, nicht unbedingt alle voneinander verschieden.

Die Anzahl der Jordan-Blöcke zum EW λ_i und die Länge eines Jordan-Blocks zum EW λ_i lassen sich explizit berechnen.

Beispiele Jordan-Blöcke zu einem EW

Betrachte Teil der JNF mit EW λ_i auf Diagonale.

Möglichkeiten in Abhängigkeit der Vielfachheit eines EW λ_i

EW 1-fach 1 Möglichkeit

$$(\lambda_i)$$

Falls alle EW 1-fach, d.h. es gibt n Stück mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ und es ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & 0 \\ & \lambda_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_{n-1} & 0 \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

EW 2-fach 2 Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ & \lambda_i \end{pmatrix}$$

EW 3-fach 3 Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \\ & \lambda_i & 0 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

EW 4-fach 5 Möglichkeiten

Beispiele Jordan-Normalenform

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Dann liefert *Mathematica*

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann liefert *Mathematica*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exponential der Jordan-Normalenform

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $T^{-1}AT = J$ die Jordan-Normalenform. Dann ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & 0 \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}$$

wobei die J_i die Jordan-Blöcke von J sind.

Exponential der Jordan-Normalenform

Für $J = J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$

gilt

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Gegeben sei folgendes 3-Box-Kompartiment-Modell für
$0 < a, b, c < 1$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Muskel}} \arrow[r, "a"'] & \boxed{\text{Blut}} \arrow[r, "b"'] & \boxed{\text{Leber}} \arrow[l, bend right, "c"']
\end{tikzcd}$$

Das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ ist

$$y' = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & c \\ 0 & b & -c \end{pmatrix} y$$

Ein EW von A ist immer $\lambda = 0$ mit EV $v \neq 0$. Dann ist $\{t \mapsto y_\infty(t) = e^{0t}v = v\}$ eine von t unabhängige Lösung, ein stationärer Zustand.

Beispiel (nicht-)diagonalisierbar Interpretation (II)

Gesucht: Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ für $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$.

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = -1, -\frac{2}{3}, 0$ mit Eigenvektoren

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 EW einfach (alle paarweise verschieden) $\Longrightarrow$ mit 3 linear unabhängigen EV eine Basis von $\mathcal{L}_A$:

$$\left\{ t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-2t/3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel (nicht-)diagonalisierbar Interpretation (III)

Gesucht: Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ für $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$.

Die Matrix $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3}, 0$, mit dem doppelten EW $-\frac{2}{3}$. A diagonalisierbar ?
$\rightarrow$ Jordan-Normalenform J zur Berechnung e^{At}. Es ist

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich eine Basis

$$\left\{ t \mapsto e^{-2t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ t-3 \\ -t \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-2t/3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beispiel (nicht-)diagonalisierbar (IV): Konvergenz

Unterschied A (nicht-)diagonalisierbar, spiegelt sich qualitativ jeweils im Konvergenzverhalten einer Lösungsfunktion wieder:

- Diagonalisierbar: Durch $e^{-\alpha t}$ beschrieben.
- Nicht diagonalisierbar: Durch $t \cdot e^{-\alpha t}$ beschrieben, oder allgemeiner durch $q(t) \cdot e^{-\alpha t}$ mit einem Polynom in t.