Mathematik III

Herbst 2013

Gesundheitswissenschaften und Technologie Bachelor
Mathematik DZ
und Mathematik Lehrdiplom

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 3: Fourier Reihen
3.0 Wiederholung einiger Grundbegriffe

Regeln für einen Vektorraum

Erinnerung: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Dann gelten:

$$\begin{array}{rcll}
v + w & = & w + v & \text{Kommutativgesetz} \\
u + (v + w) & = & (u + v) + w & \text{Assoziativgesetz} \\
\lambda \cdot (v + w) & = & \lambda v + \lambda w & \text{Distributivgesetz} \\
(\lambda + \mu) \cdot v & = & \lambda v + \mu v & \text{Distributivgesetz} \\
(\lambda \cdot \mu) \cdot v & = & \lambda \cdot (\mu \cdot v) & \text{Assoziativgesetz}
\end{array}$$

Beim $\mathbb{R}^n = V$ nehmen wir stillschweigend noch an.

Abgeschlossen Für $v, w \in V$ ist auch $v + w \in V$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ $\lambda \cdot v \in V$, für $1 \in \mathbb{R}$ ist $1 \cdot v = v$.

Nullvektor In V gibt es ein ausgezeichnetes Element 0 mit $0 + v = v$, für alle $v \in V$ (der Nullvektor).

Inverses Zu jedem $v \in V$ gibt es ein eindeutiges Element $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$ (Inverses bezgl. Addition).

Ein beliebiger VR V (z.B. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathcal{P}_{\leq n}, \ldots$) muss all diese Regeln / Gesetze erfüllen.

Erinnerung: Skalarprodukt

Das bekannte Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

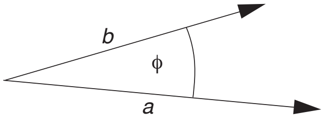
$$a \cdot b = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Es gelten

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

und

$$\cos\phi = \frac{\langle a, b \rangle}{|a||b|}$$



Und : a und b senkrecht $\iff \langle a, b \rangle = 0$

Allgemein: $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Euklidischer VR

Sei V ein reeller VR. Ein **Skalarprodukt** ordnet zwei Vektoren $x, y \in V$ eine Zahl zu $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ und erfüllt dabei folgende Regeln

symmetrisch für alle $x, y \in V$: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

bilinear für alle $x, y, z \in V$: $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
für alle $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$: $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

positiv definit für alle $x \in V$: $\langle x, x\rangle \geq 0$ und
$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Ein reeller VR zusammen mit einem Skalarprodukt heisst euklidischer VR.

Euklidischer VR: Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
dem Standardskalarprodukt für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Auf $C([a, b])$ ist ein Skalarprodukt gegeben durch
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$
für zwei stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren x, y eines euklidischen VRs heissen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$.

Notation: $x \perp y$

Beispiele

- Bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.$$

- In $C([0, 2\pi])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ betrachten wir

$$f_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

  Dann gilt $f_n \perp f_m$, falls $m \neq n$.