Mathematik III

Herbst 2013

Gesundheitswissenschaften und Technologie Bachelor Mathematik DZ und Mathematik Lehrdiplom

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

ETH Zürich

Kapitel 5. Partielle Differentialgleichungen
9. Dezember 2013

Allgemeine Hinweise

Die verwendete Folien basieren teilweise auf die im Herbst 2012 verwendete Fassung von Herrn Dr. A. Caspar und Herrn Prof. Dr. N. Hungerbühler

Partielle Differentialgleichungen (PDEs)

ODEs vs. PDEs: Ein Vergleich

Gewöhnliche Differentialgleichungen ODEs

- 1 unabhängige Variable (z.B. die Zeit t)
- 1 oder mehr abhängige Variablen (z.B. die Konzentration $C(t)$ eines Medikaments in einem Organ)

Beispiel:

- (ODE) $C'(t) = f(C(t), t)$
- (AB) $\quad C(0) = C_0 \quad$ (Anfangsbedingung)

Partielle Differentialgleichungen PDEs

- 2 oder mehr unabhängige Variablen (z.B. Zeit t und Ort $x \in \mathbb{R}^3$)
- 1 oder mehr abhängige Variablen (z.B. die Konzentration $C(x,t)$ eines Medikaments, oder die Temperatur $T(x,t)$)

Beispiel: Temperatur $T(x,t)$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

- (PDE) $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \Delta T(x,t)$
- (AB) $T(x,0) = T_0(x)$ (Anfangsbedingung)
- (RB) $T(x,t) = f(x,t)$ für $x \in \partial\Omega$ (Randbedingung)

Dabei ist

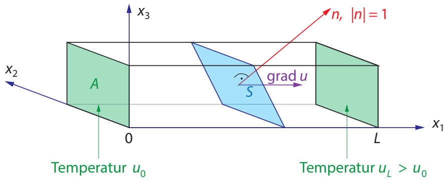
$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^n$, und $\partial\Omega$ bezeichnet den Rand von Ω.

Wärmeleitung/Diffusion

$u(x,t)$ sei die Temperatur (oder die Konzentration einer Stoffes) zur Zeit $t \geq 0$ und am Ort x in einem Festkörper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Wie breitet sich die Wärme (der Stoff) aus?

Modellsituation: Orientiere die x_1-Achse in Richtung ∇u.



Die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit von rechts nach links durch den Balken der Länge L fliesst ist proportional zur Querschnittsfläche A, zur Temperaturdifferenz und umgekehrt proportional zu L:

$$\frac{dW}{dt} = k\frac{u_L - u_0}{L}A$$

Die Materialkonstante k heisst **Wärmeleitfähigkeit**. Die Richtung der Wärmeleitung ist dabei durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gegeben.

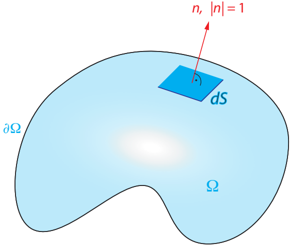
Gehen wir von der geneigten Fäche S aus, und beachten wir, dass für kleines L der Differenzenquotient die partielle Ableitung nach x_1 approximiert, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dt} = k\nabla u \cdot nS$$

Dies ist **minus** die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit durch S in Richtung n fliesst.

Allgemein ist damit der Wärmefluss durch $\partial\Omega$ nach aussen

$$\phi(\partial\Omega) = -\int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot n\, dS$$



Die pro Masse gespeicherte Wärmemenge ist proportional zur Temperatur: Die in Ω enthaltene Wärmemenge ist daher

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} cu\rho dV$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität pro Masseneinheit des Stoffes, und ρ seine Dichte ist.

Somit

$$\begin{aligned}\frac{dW(\Omega)}{dt} &= \int_\Omega c\frac{\partial u}{\partial t}\rho\,dV = -\phi(\partial\Omega) = \\ &= \int_{\partial\Omega} k\nabla u\cdot n\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega \operatorname{div}(k\nabla u)dV\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für beliebiges Ω, daher müssen die roten Integranden gleich sein:

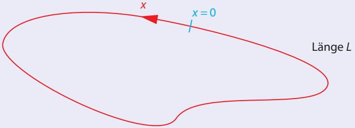
$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla u)$$

Ist k konstant, so erhält man daraus mit $D := \frac{k}{c\rho} > 0$ die **Wärmeleitungs**- oder **Diffusionsgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u$$

Lösung von PDEs

Beispiel: Wärmeleitung im geschlossenen Draht



Auf dem Draht der Länge L messen wir die Position x als Entfernung ab einem willkürlichen Referenzpunkt 0.

Zu Beginn liegt eine Hälfte des Drahts in einem Wärmebad der Temperatur 1, der Rest hat Temperatur 0. Zur Zeit $t = 0$ wird der Draht aus dem Wärmebad gehoben, und die resultierende Wärmeverteilung ist zu berechnen. Zu lösen ist also:

$$
\begin{aligned}
&(PDE) && \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
&(AB) && u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \frac{L}{2}[\\ 0 & \text{für } x \in [\frac{L}{2}, L[\end{cases} && \\
&(RB) && u(x+L,t) = u(x,t) && \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Lösungsschritt: Separation der Variablen

Ansatz: Wir suchen Lösungen der PDE von der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

- Einsetzen in die PDE liefert $\dot{T}X = DX''T$,
- Division durch DXT ergibt

$$\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

Hält man erst x und dann t fest, so sieht man, dass beiden Seiten von (1) gleich einer Konstanten κ sind.
D.h. es gelten die beiden ODEs

$$\dot{T} = \kappa DT \tag{$*$}$$

$$X'' = \kappa X \tag{$**$}$$

- Für $\kappa \geq 0$ besitzt $(**)$ nur die periodische Lösung $X \equiv 0$. Wir setzen also $\kappa := -\omega^2 < 0$.
- Dann besitzt $(**)$ die periodischen Lösungen

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

- Periode L liegt genau dann vor, wenn $\omega = \omega_n := \frac{2\pi n}{L}$ für $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

D.h. die L-periodischen Lösungen von $(**)$ sind

$$X_n(x) = A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)$$

Entsprechend erhalten wir nun für jedes $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ aus $(*)$ $\dot{T}_n = -D\omega_n^2 T_n$ die Lösungen

$$T_n(t) = \exp(-D\omega_n^2 t)$$

Die Lösungen von (PDE) und (RB) sind also die Funktionen

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= (A_n\cos(\omega_n x) + B_n\sin(\omega_n x))\exp(-D\omega_n^2 t) \end{aligned}$$

Diese Lösungen nennen wir **Basislösungen**.

2. Lösungsschritt: Superposition

- (PDE) und (RB) sind linear und homogen.
- Daher sind Linearkombinationen und aus den Basislösungen gebildete Reihen wieder Lösungen:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{2\pi n}{L} x) + B_n \sin(\frac{2\pi n}{L} x) \right) \exp(-D \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} t)$$

  ist (Konvergenz der Reihe vorausgesetzt) für beliebige Wahl der A_n, B_n eine Lösung von (PDE) und (RB).

Idee: Wähle die Koeffizienten A_n, B_n so, dass auch die (AB) erfüllt ist!

D.h.

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{2\pi n}{L} x) + B_n \sin(\frac{2\pi n}{L} x) \right) \overset{!}{=} u_0(x)$$

Dies ist offenbar gerade dann der Fall, wenn die A_n, B_n als Fourier-Koeffizienten der Funktion u_0 gewählt werden:

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \text{ für } n \geq 1$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi} \text{ für } n \text{ ungerade}, \quad B_n = 0 \text{ für } n \text{ gerade}$$

Setzen wir diese Koeffizienten ein, erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \exp\left(-D \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} t\right)$$

Bemerkung: An der Lösungsformel liest man ab, dass $u(x,t)$ für $t \to \infty$ gegen die stationäre (d.h. zeitunabhängige) Lösung $A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx$ von (PDE) und (RB) konvergiert.

Auch ohne Kenntnis einer expliziten Lösungsformel lassen sich Informationen über die Lösung gewinnen:

A priori Aussagen über die Lösung

- Integriert man die PDE über x von 0 bis L, ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u\,dx = \int_0^L u_{xx}dx = 0$$

wobei wir die Notation $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ etc. benützen.

D.h. die Wärmemenge im Draht ist zeitlich konstant

$$\int_0^L u(x,t)\,dx = \text{konst.}$$

was physikalisch plausibel ist, da weder Wärme zu- noch abgeführt wird.

- Multipliziert man die PDE mit u und integriert dann über x von 0 bis L, ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^L u^2 dx = \int\limits_0^L u u_t dx = \int\limits_0^L u u_{xx} dx \overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} -\int\limits_0^L u_x^2 dx \leq 0$$

D.h. $\int_0^L u^2(x,t)dx$ ist monoton fallend in t.

- Multipliziert man die PDE mit $\ln u$ und integriert dann über x von 0 bis L, ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u \ln u \, dx = \frac{d}{dt}\int_0^L (u \ln u - u)\, dx =$$

$$\int_0^L u_t \ln u \, dx = \int_0^L u_{xx} \ln u \, dx \overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} -\int_0^L \frac{u_x^2}{u} dx \leq 0$$

D.h. die **Entropie** $-\int_0^L u(x,t)\ln u(x,t)\, dx$ ist in der Zeit monoton wachsend.

- Betrachten wir $v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$ (für $\varepsilon > 0$), und nehmen an, v nehme zur Zeit t_0 in x_0 ein Maximum an, d.h.

$$v(x_0, t_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} v(x, t_0)$$

Dann gilt

$$0 \geq v_{xx}(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0) + \varepsilon$$

d.h. $-\varepsilon \geq v_t(x_0, t_0)$. Wegen Stetigkeit gilt dann

$$-\frac{\varepsilon}{2} \geq v_t(x, t)$$

in einer ganzen Umgebung von (x_0, t_0). Inbesondere gilt für $t < t_0$ nahe genug bei t_0

$$\max_{x \in \mathbb{R}} v(x, t) \geq v(x_0, t) > v(x_0, t_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} v(x, t_0)$$

Da diese Überlegung unabhängig von t_0 gemacht wurde, ist $\max_{x \in \mathbb{R}} v(x, t)$ für alle $t \geq 0$ strikt monoton fallend.

Im Limes $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$\max_{x \in \mathbb{R}} u(x,t) \text{ ist monoton fallend für } t \geq 0$$

Dies ist ein Spezialfall des sogenannten **Maximumprinzips** für die Wärmeleitungsgleichung.

Betrachtet man $-u$ statt u, so folgt das entsprechende **Minimumprinzip**:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} u(x,t) \text{ ist monoton wachsend für } t \geq 0$$

Das Maximumprinzip besagen also, dass sich bei der Wärmeleitung (und entsprechend bei der Diffusion) Wärme nicht lokal konzentrieren kann, ohne dass dort geheizt wird. Ebenso ist wegen des Minimumprinzips spontane lokale Abkühlung nicht möglich. Dies steht im Gegensatz zu Wellenphänomenen, wo sich Wellen lokal aufschaukeln können, was etwa bei der Nierensteinzertrümmerung durch Schall explizit ausgenützt wird.

Die Laplace-Gleichung

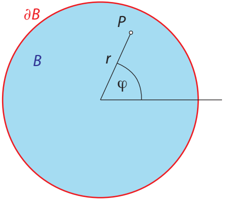
- Eine stationäre, also nicht von der Zeit abhängige Lösung der Wärmeleitungsgleichung erfüllt die **Laplace-** oder **Potentialgleichung**

$$\Delta u = 0$$

- Wegen $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ ist dann eine Lösung u das Potential des divergenzfreien Vektorfeldes ∇u.
- Elektrostatische Felder, oder Gravitationsfelder sind von dieser Art.
- Lösungen der Laplace-Gleichung heissen **harmonische Funktionen**.

Als Beispiel suchen wir die stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einer Kreisscheibe B vom Radius r_0, also die Wärmeverteilung auf B, die sich nach langer Zeit einstellt.
Dazu statten wir B mit Polarkoordinaten aus:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \text{in } B$$
$$u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) \text{ auf } \partial B$$



ξ beschreibt die gegebene Randtemperatur.

1. Lösungsschritt: Separation der Variablen

Ansatz: $u(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)$.

- Einsetzen in die PDE liefert

$$f''g + \tfrac{1}{r}f'g + \tfrac{1}{r^2}f\ddot{g} = 0$$

(wobei $'$ die Ableitung nach r, und $\dot{}$ die Ableitung nach φ bezeichnet).

- Nach Multiplikation mit $\frac{r^2}{fg}$ ergibt sich

$$\frac{1}{f}(r^2 f'' + rf') = -\frac{\ddot{g}}{g} =: \omega^2$$

- Da links eine Funktion von r und rechts eine von φ steht, müssen beide Seiten eine Konstante ω^2 sein, wobei wir das Vorzeichen bereits geeignet gewählt haben).

- Es sind also zwei ODEs zu lösen:

$$\ddot{g} = -\omega^2 g, \qquad r^2 f'' + rf' - \omega^2 f = 0$$

- Die Lösungen der Gleichung links sind

$$g(\varphi) = A\cos(\omega\varphi) + B\sin(\omega\varphi)$$

- Da nur 2π-periodische Lösungen in Frage kommen, ist $\omega = \omega_n := n \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$g_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)$$

- Die rechte Gleichung $r^2 f_n'' + r f_n' - n^2 f_n = 0$ (eine Eulersche Gleichung) löst man mit dem Ansatz $f_n(r) = r^\alpha$.
- Einsetzen liefert $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0$, also $\alpha = \pm n$.
- Da wir keine Singularitäten wollen, kommt nur $\alpha = n$ in Frage, also $f_n(r) = r^n$.
- Damit erhalten wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die Basislösungen

$$u_n(r, \varphi) = f_n(r) g_n(\varphi) = r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

2. Lösungsschritt: Superposition der Basislösungen

Da die PDE linear und homogen ist, ist auch

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

eine Lösung (Konvergenz der Reihe vorausgesetzt).

Idee: Wähle die Koeffizienten A_n, B_n so, dass die Randbedingung erfüllt ist, d.h.

$$\begin{aligned} u(r_0,\varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \stackrel{!}{=} \xi(\varphi) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

wobei auf der unteren Zeile die Fourier-Reihe von ξ steht. Durch Koeffizientenvergleich finden wir

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n}{r_0^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{r_0^n}$$

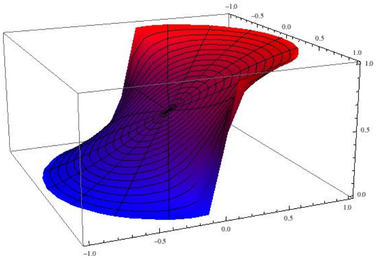
Somit lautet die endgültige Lösung

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n}(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Für $\xi(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ erhalten wir

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin(n\varphi)$$

Darstellung: Die Temperatur ist als Graph dargestellt. Rot ist heiss, blau ist kalt:



Wir formen die Lösung noch um, indem wir die Fourier-Koeffizienten einsetzen:

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n}(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)) \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \xi(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\xi(t)\cos(nt)dt\cos(n\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi}\xi(t)\sin(nt)dt\sin(n\varphi)\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(nt)\cos(n\varphi)) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(nt)\sin(n\varphi))\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] dt
\end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Kosinus liefert für den roten Ausdruck

$$\cos(nt)\cos(n\varphi)) + \sin(nt)\sin(n\varphi) = \cos(n(t-\varphi))$$

Die eckige Klammer lässt sich dann mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe umformen:

$$\begin{aligned}
\left[\,\dots\,\right] &= \operatorname{Re}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}\right)^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(1+2\frac{\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\frac{r_0+re^{i(t-\varphi)}}{r_0-re^{i(t-\varphi)}} = \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(t-\varphi)+r_0^2}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies oben für die eckige Klammer ein, ergibt sich die Lösung ohne Umweg über die Fourier-Reihe von ξ:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(t)\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(t-\varphi)+r_0^2}\,dt$$

Dies ist die **Formel von Poisson**.

Für $r = 0$ ergibt sich insbesondere:

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) dt$$

Dies lässt sich als Satz formulieren:

Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in einem Gebiet Ω harmonisch (d.h. $\Delta u = 0$). Sei B eine Kreisscheibe mit Zentrum z, die samt Rand ∂B in Ω liegt. Dann ist $u(z)$ der Mittelwert der Werte von u auf ∂B.

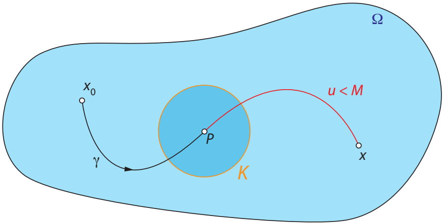
Bemerkung: Die Mittelwerteigenschaft gilt in jeder Dimension.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das

Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Nimmt eine harmonische Funktion u in einem inneren Punkt x_0 ihres zusammenhängenden Definitionsgebiets ein Maximum an, so ist u eine Konstante.

Indirekter Beweis: Sei $u(x) < u(x_0) := M$. Wir verbinden x_0 mit x durch einen Weg γ. Sei P der letzte Punkt auf γ, in dem u den Wert M annimmt und K ein Kreis um P in Ω.



Dann ist $u \leq M$ auf K, und $u < M$ in der Nähe des Punktes, wo γ K verlässt. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt dann $M = u(P) > M$. Widerspruch. $\square$

Bemerkungen: Auch das Maximumprinzip gilt in beliebigen Dimensionen. Durch Betrachten von $-u$ folgt ein entsprechendes Minimumprinzip.

Interpretation: Eine stationäre Temperaturverteilung oder eine stationäre Konzentration nimmt immer in Randpunkten den maximalen Wert an.