ETH Zürich HS 2013 — Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas — Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 10

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine (partikuläre) Lösung $y(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$2y''(t) + y(t) = u(t), \tag{1}$$

wobei u eine sogenannte Sägezahnfunktion ist,

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}t, & \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}t - 4, & \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Hinweis: berechnen Sie zuerst die (reelle) Fourier-Entwicklung von u; machen Sie dann den Ansatz $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nt)$, mit zu bestimmenden Koeffizienten $\tilde{b}_n$.

Aufgabe 2

Für gegebene Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir ihre *Laplace-Transformierte*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt := \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda f(t)e^{-st}dt, \tag{2}$$

sofern dieser Limes existiert. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) $f(t) = \begin{cases} A & \text{falls } 0 \le t < a \\ -A & \text{falls } a \le t < 2a \\ 0 & \text{falls } t \ge 2a \end{cases}$, für gegebene $a, A > 0$.

b) $f(t) = 2te^{-4t}$.

c) $f(t) = t^3$.

d) $f(t) = \cos(\omega t)$ für $\omega > 0$.