ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 12

Aufgabe 1

Für eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, i.e. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t > 0$, gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt,$$

wie man aus der Definition $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ durch Aufspaltung des Integrals über Intervalle der Länge T erkennt. Im Folgenden seien $a, A > 0$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) f periodisch mit $T = a$ und

$$f(t) = -\frac{A}{a}(t-a) \text{ für } 0 \leq t < a.$$

b) f periodisch mit $T = 2a$ und

$$f(t) = \begin{cases} A \sin(\frac{\pi}{a} t), & \text{für } 0 \leq t < a \\ 0, & \text{für } a \leq t < 2a. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\Big\} = \frac{t \sin(at)}{2a}, \quad \text{für alle } a > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz und für das entstehende Faltungsintegral das Additionstheorem

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Klasse von Differentialgleichungen

$$m y''(t) + f y(t) = K(t), \qquad \text{mit Anfangsbedingungen } y(0) = y_0 \text{ und } y'(0) = v_0, \qquad (1)$$

deren Lösungen $y(t)$, $t \geq 0$, die Bewegung eines Federpendels der Masse $m > 0$ beschreiben, das an einer Feder der Federkonstante $f > 0$ hängt und der äusseren Kraft $K(t)$, ausgesetzt ist. Hier beschreibt y_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels. Es ist zweckmässig, die Grösse $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ einzuführen, die so genannte *Eigenfrequenz* des Pendels. Bestimmen Sie $y(t)$ in folgenden Fällen mittels Laplace-Transformation:

a) $K(t) \equiv 0$ (keine äussere Krafteinwirkung).

b) $K(t) = K\cos(\omega t)$, für gewisse $K, \omega > 0$, und mit $y_0 = v_0 = 0$. Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $\omega \neq \omega_0$ und $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall).

c)

$$K(t) = \begin{cases} K, & \text{für } t \leq \tau \\ 0, & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

wobei $K, \tau > 0$, und mit $y_0 = v_0 = 0$ (konstante äussere Anregung der Dauer τ).

Abgabe: Dienstag, 10. Dezember, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.