ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 13

Aufgabe 1 (Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung)

Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung $u(x,y)$ auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0,0)$, $(2\pi,0)$, $(0,2\pi)$, $(2\pi,2\pi)$. Drei Seiten von Q werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte $u(x,\pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x)$. Die gesuchte Funktion u erfüllt also

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ auf } Q, \text{ und } \begin{cases} u(0,y) = 0 & \text{für } 0 < y < 2\pi \\ u(2\pi,y) = 0 & \text{für } 0 < y < 2\pi \\ u(x,0) = 0 & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ u(x,2\pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x) & \text{für } 0 < x < 2\pi \end{cases} \tag{1}$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.

Hinweis: Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für X periodische Lösungen auftreten.

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für X unter Beachtung der Randbedingungen $X(0) = X(2\pi) = 0$.

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für Y unter Beachtung der Randbedingung $Y(0) = 0$.

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x,y)$.

e) Wie lautet die Lösung von (1), wenn die Randbedingung $u(x,2\pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x)$ für $0 < x < 2\pi$ durch

$$u(x,2\pi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x - 4, & \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases} \tag{2}$$

ersetzt wird? *Hinweis:* Verwenden Sie Serie 10, Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (Eindimensionale Wellengleichung)

Wir betrachten die lineare partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{für } x,t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung einer eindimensionalen Welle.

a) Bestimmen Sie die Lösung von (3) mit Anfangsdaten $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = 0$.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ und bestimmen Sie f und g aus den Anfangsdaten.

b) $(*)$ Sei nun allgemeiner $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$. Bestimmen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Abgabe: Dienstag, 17. Dezember, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten im Vorraum des Büros HG E 66.1. Eine allfällige Rückgabe erfolgt dann in denselben Fächern bis spätestens Montag, 6. Januar 2014.