ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 2

Aufgabe 1 (Repetition lineare Algebra)

Seien im Folgenden

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie BA; B^{-1}; AB^5.

b) Berechnen Sie die Determinanten von $(2A)^2 B^3$ und $\left(A^T + B\right)^T$.

c) Geben Sie die Eigenwerte von A an.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

e) Finden Sie, falls möglich, Zahlen s und t so, dass das Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. Begründen Sie andernfalls die Unmöglichkeit.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung von

$$y' = x + y, \text{ mit } y(0) = 0. \tag{1}$$

Aufgabe 3*

Man betrachte ein biologisches Populationsmodell, bei welchem die Grösse $y(t)$ der Population zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch die (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung

$$y' = wy - sy^2, \qquad \text{mit } y(0) = y_0, \tag{2}$$

für gegebene Parameter $w, s > 0$ und Anfangspopulation $y_0 \geq 0$. Die Interpretation ist wie folgt: unter Vernachlässigung des zweiten Terms ist die Wachstumsrate y' proportional zur Anzahl y der Individuen mit Proportionalitätsfaktor w (genannt Wachstumskonstante). Der zweite Term modelliert die Tatsache, dass sich bei zunehmender Population die Individuen durch (Zweier-)stösse gegenseitig behindern und das Wachstum damit gehemmt wird (s heisst in diesem Zusammenhang Stossparameter).

a) Für welche Werte von $y_0 \geq 0$ (in Abhängigkeit von w und s) ist die Lösung des Anfangswertproblems (2) zeitlich konstant, i.e. $y'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$?

b) Bestimmen Sie die Lösung von (2) (in Abhängigkeit von w und s) für gegebene Anfangspopulation y_0 mit $0 < y_0 < \frac{w}{s}$ und interpretieren Sie Ihre Lösung. (*Hinweis*: es gilt $\frac{a}{y(a-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}$, für beliebige $a \in \mathbb{R}$, $y \neq 0, a$).

c) Was geschieht im Fall $y_0 > \frac{w}{s}$?

Abgabe: Dienstag, 1. Oktober, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.