ETH Zürich HS 2013 — Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas — Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 3

Aufgabe 1

Sei

$$y' - y = (xy)^2, \text{ mit } y \neq 0. \tag{1}$$

a) Führen Sie die Variablensubstitution $u = 1/y$ durch, um eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung in u zu erhalten.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung von

$$y' = \cos(x) - y, \text{ mit } y\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie durch wiederholte partielle Integration, dass $\int \cos(x)e^x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, gilt.

Aufgabe 3

Für ein Medikament sei folgendes 2-Box-Kompartiment-Modell mit $0 < b < 1$ gegeben:

$$\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{\;b\;} \boxed{\text{Leber}}$$

Dies bedeutet, dass das Medikament mit einer Rate proportional zur Medikamentenmenge im Blut (und Proportionalitätskonstante b) in die Leber fliesst. Zur Zeit $t \geq 0$ sei die Medikamentenmenge im Blut $y_1(t)$, in der Leber sei sie $y_2(t)$.

a) Zu Beginn $t = 0$ sei sie im Blut gleich $y_{1,0}$ und in der Leber gleich 0. Bestimmen Sie die Entwicklungen der Medikamentenmenge

$$t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $y_{1,0} = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

b) Um eine Mindestmenge $y_{1,1}$ im Blut mit $0 < y_{1,1} < y_{1,0}$ zu sichern, muss die Infusion mit $y_{1,0}$ periodisch wiederholt werden. Bestimmen Sie die Periode in Abhängigkeit von $b, y_{1,0}, y_{1,1}$ und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

c) Man nehme nun an, dass dem Blut durch eine konstante Infusion eine Medikamentenmenge mit Rate $g > 0$ zugefürt wird. Zu Beginn sei in beiden Kompartimenten die Menge gleich 0.

i. Zeichnen Sie das zugehörige Kompartiment-Modell, bestimmen Sie die Entwicklungen $t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$ und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $g = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

ii. Angenommen, man unterbreche die Infusion bei $t = T_1$ mit einer Menge im Blut Y_1. Bestimmen Sie den Verlauf für $t \geq T_1$. Um eine Mindestmenge von Y_2 zu garantieren, starte die Infusion wieder zum Zeitpunkt T_2. Bestimmen Sie T_2 und skizzieren Sie den Verlauf zwischen Y_1 und Y_2.

Abgabe: Dienstag, 8. Oktober, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.