ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 4

Eine $n \times n$-Matrix heisst *diagonalisierbar*, falls sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Die Bezeichnung ergibt sich aus folgender Tatsache: ist A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, $Av_i = \lambda_i v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ mit $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, und $P = (v_1 \dots v_n)$ die (invertierbare) quadratische Matrix mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$, dann gilt

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{1}$$

wobei $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen bezeichnet.

Aufgabe 1

Berechnen Sie e^A für folgende Matrizen A:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. *Hinweis*: diese Matrix ist diagonalisierbar. Verwenden Sie (1).

Aufgabe 2

Die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$ erfülle das DGL-System $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses DGL-Systems mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren von A, und lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise wie in Aufgabe 1b) die Matrix e^{tA}, $t \geq 0$.

c) Berechnen Sie mithilfe von b) die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ erneut und vergleichen Sie mit a).

Aufgabe 3*

In dieser Aufgabe soll die Identität

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{Sp}(A)} \tag{2}$$

für beliebige *diagonalisierbare* $n \times n$-Matrizen überprüft werden (hier bezeichnet $\operatorname{Sp}(A)$ die Spur von A, i.e. die Summe der Diagonalelemente von A). Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

a) Bestimmen Sie $\det(e^A)$ in Abhängigkeit von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ unter Verwendung von (1).

b) Zeigen Sie, dass die Spur *zyklisch* ist, d.h. für beliebige $n \times n$-Matrizen B, C gilt $\mathrm{Sp}(BC) = \mathrm{Sp}(CB)$.

c) Bestimmen Sie den Ausdruck $e^{\mathrm{Sp}(A)}$ in Abhängigkeit von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ unter Verwendung von (1) und b).

d) Folgern Sie (2) aus a) und c).

Abgabe: Dienstag, 15. Oktober, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.