ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 5

Aufgabe 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 7y' + 6y = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

b) Wir betrachten nun $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, wobei $y(t)$ eine (beliebige) Lösung von (1) sei. Die Funktion $Y(t)$ erfüllt das DGL-System

$$Y'(t) = AY(t). \tag{2}$$

Bestimmen Sie A (diese Matrix heisst *Begleitmatrix* zur Differentialgleichung (1)).

c) Überprüfen Sie, dass die Eigenwerte von A genau durch die Lösungen der zur Differentialgleichung (1) assoziierten charakteristischen Gleichung $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ gegeben sind.

d) Geben Sie ein Fundamentalsystem $Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)$ für (2) an (i.e. $Y_1(t), ..., Y_3(t)$ erfüllen jeweils (2) und sie sind linear unabhängig). Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ von (3).

b) Geben Sie die Begleitmatrix A zu (3) an und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das DGL-System $Y'(t) = AY(t)$.

Aufgabe 3

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b, \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}, \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: es gilt $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, welche das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, für $t \geq 0$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Abgabe: Dienstag, 22. Oktober, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.