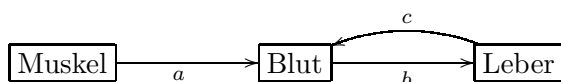


Mathematik III - D-HEST

Serie 6

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes 3-Box-Kompartiment-Modell für $0 < a, b, c < 1$:

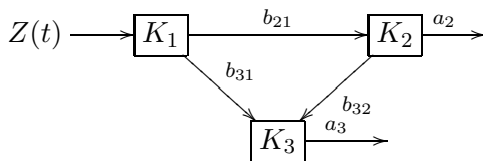


- a) Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.
- b) Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$, welche nicht von t abhängt.
- c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ für $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$.
- d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$. *Hinweis:* Betrachten Sie $J = T^{-1}AT$, mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$:



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell wird beschrieben durch

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t), \quad \text{für } t \geq 0, \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -(b_{31} + b_{21}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2 + b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Seien alle Raten gleich $\frac{1}{2}$ und die Zufuhr konstant gleich 2. Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, und berechnen Sie diesen.
- b) Seien die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$, $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems (1).

Hinweis: prüfen Sie, dass $T^{-1}AT = D$ für eine geeignete Diagonalmatrix D und mit

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und betrachten Sie $x(t) = T^{-1}y(t)$.

Abgabe: Dienstag, 29. Oktober, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.