

Mathematik III - D-HEST Serie 7

Aufgabe 1

Es seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $y'(t) = Ay(t)$ das zugehörige DGL-System.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses DGL-systems.
- Für welche Anfangswerte $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsfunktion des AWP's periodisch?

Aufgabe 2

Eine chemische Reaktion zweiter Ordnung beinhaltet die Wechselwirkung (Kollision) von einem Molekül der Substanz P mit einem Molekül der Substanz Q , woraus ein Molekül einer neuen Substanz X hervorgeht. Dies ist durch folgende Schreibweise wiedergegeben: $P + Q \rightarrow X$.

Nehmen wir an, dass p und q , die jeweiligen Anfangskonzentrationen von P und Q sind und $x(t)$ die Konzentration von X zur Zeit $t \geq 0$ ist. Dann sind $p - x(t)$ und $q - x(t)$ die jeweiligen Konzentrationen von P und Q zur Zeit t , und die Reaktionsgeschwindigkeit wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))(q - x(t)) \quad (1)$$

gegeben, wobei α eine positive Konstante ist.

- Es seien $x(0) = 0$ und $p \neq q$. Lösen Sie dieses AWP mit Trennung der Variablen.
Bestimmen Sie für die Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ Definitionsbereich und Grenzwert von x für $t \rightarrow \infty$,
- Wenn es sich bei P und Q um die gleichen Substanzen handelt, dann ist $p = q$, und Gleichung (1) wird ersetzt durch

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))^2.$$

Lösen sie die unter a) gestellten Aufgaben für diese Situation.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Integrale, welche typische Beispiele in der Theorie der Fourier-Reihen sind.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$, wobei $n, m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$.

b) $\int_0^{\pi} \sin(nx) dx$ für $n = 1, 2, 3$ und für beliebiges $n \neq 0$.

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$

Abgabe: Dienstag, 5. November, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.