ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Serie 9

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der (reellen) Fourier-Reihe zur 2π-periodischen Funktion f mit

$$f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

auf zwei verschiedene Arten:

a) durch direktes Ausrechnen mittels

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \text{ für } n \geq 0, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \text{ für } n \geq 1.$$

Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$, für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) durch Berechnung der komplexen Koeffizienten c_n und Bestimmung von a_n, b_n mittels c_n.

Aufgabe 2

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer T-periodischen ($T > 0$) Funktion $f(x)$ lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega x} dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz ist. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n der Fourier-Reihe zu den Funktionen:

a) $g(x)$ 2-periodisch mit $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[$.

b) $h(x)$ 1-periodisch mit $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0, 1[$.

Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + 2y(x) = \sin^2(x). \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung $y(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ von (1) lässt sich auch mittels Fourier-Reihen-Entwicklung berechnen.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y''(x) + 2y(x) = 0$.

b) Die allgemeine Lösung von (1) lautet bekanntlich $y_h + y_p$, wobei y_p eine partikuläre Lösung von (1) ist. Bestimmen Sie ein solches y_p mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Hinweis: Verwenden Sie Serie 8, Aufgabe 1c).

Abgabe: Dienstag, 19. November, in der Übungsstunde, oder vor 18:00 Uhr am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten. Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.