ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST
Lösung 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen, und vereinfachen Sie die Resultate soweit wie möglich:

a) $x^{1/3}(1-x)^{2/3}$, für $x \in (0,1)$.

Lösung: Für $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\big(x^{1/3}(1-x)^{2/3}\big)' &= \frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{2/3} - \frac{2}{3}x^{1/3}(1-x)^{-1/3}\\ &= \frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}(1-3x).\end{aligned}$$

b) $\log(\log(1+x))$, für $x > 0$, wobei log die Logarithmusfunktion zur Basis e bezeichnet.

Lösung: Man beachte zunächst, dass diese Funktion wohldefiniert ist, da $\log(1+x) > 0$ für $x > 0$ gilt. Man erhält nun für $x > 0$,

$$\big(\log\log(1+x)\big)' = \frac{1}{\log(1+x)}\big(\log(1+x)\big)' = \frac{1}{(1+x)\log(1+x)}.$$

c) $x^{1/x}$, für $x > 0$.

Lösung: Für $x > 0$,

$$\big(x^{1/x}\big)' = \big(e^{\frac{1}{x}\log x}\big)' = x^{1/x}\big(\frac{1}{x}\log x\big)' = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1-\log x).$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mittels Separation der Variablen die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{y^2}, \text{ für } x > 0, \text{ mit } y(e) = 2^{1/3}.$$

Lösung: Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung. Separation der Variablen ergibt $y^2 dy = \log(x)dx$, und Integrieren

$$\frac{y^3}{3} = \int \log(x)dx.$$

Für das Integral erhalten wir mittels partieller Integration

$$\int 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x) - \int dx = x(\log(x) - 1) + C,$$

für gewisses $C \in \mathbb{R}$. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = \sqrt[3]{3x(\log(x) - 1) + C'}, \text{für gewisses } C' \in \mathbb{R}.$$

Aus der Bedingung $y(e) = \sqrt[3]{2}$ ergibt sich unmittelbar $C' = 2$.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0,$$

sowie das Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$.

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ mit Nullstellen bei $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{2t} + be^t, \text{ mit } a, b \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Es gilt $x(t) = ae^{2t} + be^t = e^t(ae^t + b)$ Der Faktor e^t im Produkt auf der rechten Seite geht gegen ∞ für $t \to \infty$. Der Faktor $(ae^t + b)$ geht gegen ∞ falls $a > 0$, gegen $-\infty$ falls $a < 0$ und ist konstant gleich b falls $a = 0$. Daraus ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a > 0 \text{ oder } (a = 0, b > 0), \\ -\infty, & \text{falls } a < 0 \text{ oder } (a = 0, b < 0), \\ 0, & \text{falls } (a = 0, b = 0). \end{cases}$$

b) Man betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t}. \tag{2}$$

Finden Sie eine partikuläre Lösung von (2).

Lösung: Wir verwenden den Ansatz $x(t) = ce^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = ce^{-t} + 3ce^{-t} + 2ce^{-t} = 6ce^{-t},$$

somit $c = 1$. Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch $x_{\text{part}}(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem für (2) unter der Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

Lösung: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist laut den vorherigen Teilaufgaben

$$x(t) = e^{-t} + ae^{2t} + be^t,\ a, b, t \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $x(0) = 1$ liefert $1 + a + b = 1$, während wir aus der Bedingung $x'(0) = -3$ die Gleichung $-1 + 2a + b = -3$ erhalten. Somit gilt $a = -2$ und $b = 2$. Die gesuchte Lösung ist also $x(t) = e^{-t} - 2e^{2t} + 2e^t$, $t \in \mathbb{R}$.