Mathematik III - D-HEST

Lösung 10

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine (partikuläre) Lösung $y(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$2y''(t) + y(t) = u(t), \tag{1}$$

wobei u eine sogenannte Sägezahnfunktion ist,

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}t - 4, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Hinweis: berechnen Sie zuerst die (reelle) Fourier-Entwicklung von u; machen Sie dann den Ansatz $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nt)$, mit zu bestimmenden Koeffizienten $\tilde{b}_n$.

Lösung: Anhand einer Skizze von u erkennt man leicht, dass ihre periodische Fortsetzung *ungerade* ist. Daher gilt

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \text{ mit } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin(nt)\, dt, \text{ für } n \geq 1 \tag{2}$$

(i.e., die Koeffizienten a_n, $n \geq 0$, verschwinden). Seien

$$T_j(n) = \frac{1}{\pi} \int_{(j-1)\pi/2}^{j\pi/2} \frac{2}{\pi} t \sin(nt) dt, \qquad \text{für } j = 1, \ldots, 4,$$

sodass

$$b_n = \sum_{i=1}^{4} T_i(n), \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Sei zunächst n ungerade, i.e. $n = 2k + 1$ für gewisses $k \geq 0$. Wir reduzieren die Berechnung der vier Terme T_j auf die von T_1. Da $u(t) = -u(t - \pi)$ für alle $t \in [\pi, 2\pi]$, gilt

$$\begin{aligned} T_3(2k+1) + T_4(2k+1) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u(t) \sin((2k+1)t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u(t-\pi) \sin((2k+1)t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(s) \sin((2k+1)s + (2k+1)\pi) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(s) \sin((2k+1)s) ds \\ &= T_1(2k+1) + T_2(2k+1), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile $\sin(x + (2k + 1)\pi) = -\sin(x)$ verwendet haben. Weiter ist $u(t) = u(\pi - t)$ für alle $t \in [0, \pi]$, und daher

$$\begin{aligned}
T_2(2k+1) &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} u(\pi - t)\sin((2k+1)t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{0} u(s)\sin((2k+1)(\pi - s))(-ds) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} u(s)\sin((2k+1)(\pi - s))ds,
\end{aligned}$$

und da $\sin((2k+1)(\pi - s)) = -\sin(-(2k+1)s) = \sin((2k+1)s)$ sieht man, dass $T_2(2k+1) = T_1(2k+1)$. Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} = 4T_1(2k+1) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} t \sin((2k+1)t)dt \\
&= \underbrace{\frac{4}{\pi}\Big[\frac{2}{\pi}t \cdot \frac{-\cos((2k+1)t)}{2k+1}\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\frac{\cos((2k+1)t)}{2k+1}dt \\
&= \frac{8}{\pi^2}\Big[\frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)^2}\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2}\Big) \\
&= \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Sei nun $n = 2k$ für gewisses $k \geq 1$. Durch eine ähnliche Rechnung wie (3) erhält man $T_3(2k) + T_4(2k) = -(T_1(2k) + T_2(2k))$. Das zusätzliche Minuszeichen rührt daher, dass $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt insgesamt $b_{2k} = 0$. Damit ist die Fourierentwicklung von u vollständig. Dem Hinweis folgend machen wir nun für die gesuchte Lösung y von (1) den Ansatz

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nt), \tag{4}$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\tilde{b}_n$. Ähnlich wie in Serie 9, Aufgabe 3 b) berechnet man

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{b}_n \cos(nt), \qquad y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\tilde{b}_n \sin(nt),$$

und damit

$$2y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n(1 - 2n^2)\sin(nt).$$

Damit dies gleich u ist, vergleichen wir die Koeffizienten beider Reihenentwicklungen und erhalten die Bedingung $\tilde{b}_n(1 - 2n^2) = b_n$, also insbesondere $\tilde{b}_n = 0$ für gerade n, und eine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet demnach

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{((2k+1)\pi)^2}\frac{(-1)^k}{1 - 2(2k+1)^2}\sin((2k+1)t).$$

Aufgabe 2

Für gegebene Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir ihre *Laplace-Transformierte*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt := \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(t)e^{-st}dt, \tag{5}$$

sofern dieser Limes existiert. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) $f(t) = \begin{cases} A & \text{falls } 0 \le t < a \\ -A & \text{falls } a \le t < 2a \\ 0 & \text{falls } t \ge 2a \end{cases}$, für gegebene $a, A > 0$.

Lösung: Sei $F_\lambda(s) = \int_0^\lambda f(t)e^{-st}dt$, und damit $F(s) = \lim_{\lambda\to\infty} F_\lambda(s)$. Für alle $\lambda \ge 2a$ gilt

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) &= \int_0^a Ae^{-st}dt + \int_a^{2a} (-A)e^{-st}dt + \int_{2a}^\lambda 0 \cdot e^{-st}dt \\ &= \frac{A}{s}(1-e^{-sa}) + \frac{A}{s}(e^{-2sa} - e^{-sa}) + 0 = \frac{A}{s}(1-e^{-sa})^2. \end{aligned}$$

Da diese Funktion nicht von λ abhängt, gilt insbesondere auch

$$F(s) = \frac{A}{s}(1-e^{-sa})^2.$$

b) $f(t) = 2te^{-4t}$.

Lösung: Mittels partieller Integration erhält man für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) = \int_0^\lambda 2te^{-(s+4)t}dt &= -\frac{2}{s+4}\left[te^{-(s+4)t}\right]_{t=0}^{t=\lambda} + \frac{2}{s+4}\int_0^\lambda e^{-(s+4)t}dt \\ &= \frac{2}{s+4}\frac{\lambda}{e^{(s+4)\lambda}} - \frac{2}{(s+4)^2}(e^{-(s+4)\lambda} - 1). \end{aligned}$$

Eine einfache Anwendung der Regel von L'Hôpital liefert, dass für beliebige $c > 0$ und Polynome P (i.e. Funktionen der Form $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k$, für gewisses $n \ge 0$ und Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$) gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{P(\lambda)}{e^{c\lambda}} = 0 \tag{6}$$

(anschaulich bedeutet dies, dass die Exponentialfunktion "schneller" wächst als jede Potenz). Dadurch ergibt sich

$$F(s) = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{2}{s+4}\frac{\lambda}{e^{(s+4)\lambda}} - \frac{2}{(s+4)^2}(e^{-(s+4)\lambda} - 1)\right] = 0 - \frac{2}{(s+4)^2}(0-1) = \frac{2}{(s+4)^2}.$$

c) $f(t) = t^3$.

Lösung: Nach dreimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) = \int_0^\lambda t^3e^{-st}dt &= -\frac{1}{s^3}\cdot\frac{\lambda^3s^2 + 3\lambda^2s + 6\lambda}{e^{\lambda s}} + \frac{6}{s^3}\int_0^\lambda e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s^3}\cdot\frac{\lambda^3s^2 + 3\lambda^2s + 6\lambda}{e^{\lambda s}} - \frac{6}{s^4}(e^{-s\lambda} - 1). \end{aligned}$$

Wegen (6) verschwindet der erste Summand im Limes $\lambda \to \infty$ und man erhält

$$F(s) = \frac{6}{s^4}.$$

d) $f(t) = \cos(\omega t)$ für $\omega > 0$.

Lösung: Wir integrieren zwei Mal partiell (alternativ kann man auch die Formel $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ verwenden, welche unmittelbar aus der Euler'schen Identität $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt). Es gilt

$$\begin{aligned}
F_\lambda(s) = \int_0^\lambda \cos(\omega t)e^{-st}dt &= -\frac{1}{s}\big[\cos(\omega t)e^{-st}\big]_{t=0}^{\lambda} - \frac{\omega}{s}\int_0^\lambda \sin(\omega t)e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda} - 1) + \frac{\omega}{s^2}\big[\sin(\omega t)e^{-st}\big]_{t=0}^{\lambda} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\lambda \cos(\omega t)e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda} - 1) + \frac{\omega}{s^2}\sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda} - \frac{\omega^2}{s^2}F_\lambda(s).
\end{aligned}$$

Auflösen nach $F_\lambda(s)$ ergibt

$$F_\lambda(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\Big[-\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda} - 1) + \frac{\omega}{s^2}\sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda}\Big].$$

Da $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, hat man für alle $\omega, s > 0$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda} = 0 \text{ und } \lim_{\lambda\to\infty} \sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda} = 0.$$

Also erhält man

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\Big[-\frac{1}{s}(0-1) + 0\Big] = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$