ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 11

Aufgabe 1

Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Transformationssätze die Laplace-Transformierte $F(s)$, $s > 0$, folgender Funktionen:

a) $f(t) = 4t^3 - t^2 + 2t$.

Lösung: Sei

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Aus Serie 10, Aufgabe 2 c) wissen wir, dass $\mathcal{L}\{t^3\}(s) = 6/s^4$. Auf ähnliche Weise berechnet man $\mathcal{L}\{t^2\}(s) = 2/s^3$ und $\mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2$. Mit dem Linearitätssatz folgt dann

$$F(s) = 4\mathcal{L}\{t^3\}(s) - \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{24}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}.$$

b) $f(t) = (t-4)^2$.

Lösung: Mit dem Verschiebungssatz nach rechts gilt

$$\mathcal{L}\{(t-4)^2\}(s) = e^{-4s}\mathcal{L}\{t^2\}(s) = e^{-4s}\frac{2}{s^3}.$$

c) $f(t) = e^{-3t}\sin(\omega t)$, mit $\omega > 0$.

Lösung: Wie in der Vorlesung besprochen, gilt $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1/(1+s^2)$ (Die Berechnung verläuft ähnlich wie in Serie 10, Aufgabe 3d). Wir verwenden nacheinander den Dämpfungssatz und den Ähnlichkeitssatz und erhalten

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin(\omega t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s+3) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin(t)\}\Big(\frac{s+3}{\omega}\Big) = \frac{\omega}{\omega^2 + (s+3)^2}.$$

d) $f(t) = \cos^2(t-3)$.

Lösung: Wir berechnen zunächst $\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s)$. Da $\cos^2(t) = (1+\cos(2t))/2$ gilt, erhalten wir aus Linearität und mit Serie 10, Aufgabe 3d), dass

$$\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\Big) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)},$$

wobei wir auch verwendet haben, dass $\mathcal{L}\{1\}(s) = 1/s$ (siehe ...). Nun ergibt sich mit dem Verschiebungssatz, dass

$$\mathcal{L}\{\cos^2(t-3)\}(s) = e^{-3s}\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s) = e^{-3s}\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

e) $f(t) = 2^{3t}$.

Lösung: Es gilt
$$f(t) = 2^{3t} = e^{\ln(2^{3t})} = e^{3\ln(2)t}$$
und mittels Dämpfungssatz
$$\mathcal{L}\{2^{3t}\}(s) = \mathcal{L}\{e^{3t\ln(2)}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s - 3\ln(2)) = \frac{1}{s - 3\ln(2)}.$$

Aufgabe 2

Sei $f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, mit $\omega > 0$ und $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ auf herkömmliche Art.

Lösung: Aus Linearität und da $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$, $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = s/(s^2 + \omega^2)$, gilt
$$\mathcal{L}\{f\}(s) = A\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) + B\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{A\omega + Bs}{s^2 + \omega^2}.$$

b) Die Funktion f ist bekanntlich auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $f'' = -\omega^2 f$. Bestimmen Sie $F(s)$ erneut, indem Sie die Laplace-Transformation auf diese Differentialgleichung anwenden und dabei den Ableitungssatz für Originalfunktionen verwenden.

Lösung: Einerseits gilt aus Linearität
$$\mathcal{L}\{-\omega^2 f\}(s) = -\omega^2\mathcal{L}\{f\}(s) = -\omega^2 F(s),$$
andererseits wegen des besagten Ableitungssatzes
$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sB - \omega A.$$
Aus $f'' = -\omega^2 f$ folgt, dass $\mathcal{L}\{f''\}(s) = \mathcal{L}\{-\omega^2 f\}(s)$, also $s^2F(s) - sB - A = -\omega^2F(s)$. Auflösen nach F ergibt wiederum
$$F(s) = \frac{A\omega + Bs}{s^2 + \omega^2}.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie für gegebene Parameter $a, A > 0$ die Laplace-Transformierte der *Treppenfunktion*
$$f(t) = nA, \text{ falls } na \le t < (n+1)a, \text{ für alle } n \ge 0.$$

Hinweis: es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für alle $|q| < 1$ (geometrische Reihe).

Lösung: Für $n \ge 0$ sei
$$I_n(s) = \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-st}dt.$$

Für die Laplace-Transformierte $F(s)$ von f gilt laut Definition (mit der Wahl $\lambda = ka$ für $k \in \mathbb{N}$ sodass $\lambda \to \infty$ wenn $k \to \infty$),

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^{ka} f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} I_n(s) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(s),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei wir im zweiten Schritt die Linearität des Integrals verwendet haben. Für $I_n(s)$ erhalten wir

$$I_n(s) = nA \int_{na}^{(n+1)a} e^{-st}dt = \frac{nA}{s}(e^{-nas} - e^{-(n+1)as}), \text{ für alle } n \geq 0,$$

und damit wegen (1)

$$
\begin{aligned}
F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(s) &= \frac{A}{s}(0 + (e^{-as} - e^{-2as}) + 2(e^{-2as} - e^{-3as}) + 3(e^{-3as} - e^{-4as}) + ...) \\
&= \frac{A}{s}(e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} + ...) \\
&= \frac{A}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)as} \\
&= \frac{A}{s} e^{-as} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nas} \\
&= \frac{A}{s} e^{-as} \frac{1}{1 - e^{-as}} \\
&= \frac{A}{s(e^{as} - 1)},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt den Hinweis für die geometrische Reihe mit $q = e^{-as} < 1$ verwendet haben.