Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 12

Aufgabe 1

Für eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, i.e. $f(t + T) = f(t)$ für alle $t > 0$, gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt,$$

wie man aus der Definition $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ durch Aufspaltung des Integrals über Intervalle der Länge T erkennt. Im Folgenden seien $a, A > 0$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) f periodisch mit $T = a$ und

$$f(t) = -\frac{A}{a}(t - a) \text{ für } 0 \leq t < a.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)e^{-st}dt &= \frac{A}{a}\Big[a\int_0^a e^{-st}dt - \int_0^a te^{-st}dt\Big] \\
&= A\int_0^a e^{-st}dt - \frac{A}{a}\Big[\frac{1}{-s}te^{-st}\Big]_0^a - \frac{A}{as}\int_0^a e^{-st}dt \\
&= A\Big(1 - \frac{1}{as}\Big)\frac{1 - e^{-sa}}{s} + \frac{A}{a}\Big(\frac{a}{s}e^{-sa}\Big) \\
&= A\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{as^2} + \frac{e^{-sa}}{as^2}\Big],
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{A(as - 1 + e^{-sa})}{as^2(1 - e^{-sa})}.$$

b) f periodisch mit $T = 2a$ und

$$f(t) = \begin{cases} A\sin(\frac{\pi}{a}t), & \text{für } 0 \leq t < a \\ 0, & \text{für } a \leq t < 2a. \end{cases}$$

Lösung: Sei $I = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt$. Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a A\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)e^{-st}dt \\
&= \frac{A}{-s}\underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)e^{-st}\right]_0^a}_{=0} + \frac{A\pi}{sa}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)e^{-st}dt \\
&= \frac{A\pi}{sa(-s)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)e^{-st}\right]_0^a + \frac{A\pi^2}{a^2s^2}\int_0^a (-\sin)\left(\frac{\pi}{a}t\right)e^{-st}dt \\
&= \frac{A\pi}{s^2a}(1+e^{-sa}) - \frac{\pi^2}{a^2s^2}I.
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$I = \frac{A\pi}{s^2a}(1+e^{-sa})\Big/\left(1+\frac{\pi^2}{a^2s^2}\right) = \frac{Aa\pi}{a^2s^2+\pi^2}(1+e^{-sa}).$$

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \cdot I = \frac{Aa\pi}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})},$$

wobei wir im letzten Schritt $1 - e^{-2as} = (1+e^{-as})(1-e^{-as})$ verwendet haben.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{t\sin(at)}{2a}, \quad \text{für alle } a > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz und für das entstehende Faltungsintegral das Additionstheorem

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Bekanntlich ist

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \text{ für alle } a > 0. \tag{1}$$

Wir definieren die Funktionen $f_1(t) = \cos(at)$ und $f_2(t) = \sin(at)/a$. Dann gilt wegen (1) (und der Linearität des Operators $\mathcal{L}$), dass

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \mathcal{L}\{f_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s).$$

Mit dem Faltungssatz schliessen wir hieraus, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} &= (f_1 * f_2)(t) \\
&= \int_0^t \cos(au)\frac{\sin(a(t-u))}{a}du \\
&= \frac{1}{a}\int_0^t \cos(au)\big[\sin(at)\cos(au) - \cos(at)\sin(au)\big]du \\
&= \frac{\sin(at)}{a}\int_0^t \cos^2(au)du - \frac{\cos(at)}{a}\int_0^t \cos(au)\sin(au)du \\
&= \frac{\sin(at)}{a}\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos(2au))du - \frac{\cos(at)}{a^2}\int_0^t \underbrace{a\cos(au)}_{=\frac{d}{du}\sin(au)}\sin(au)du
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(at)}{2a}\Big(t + \frac{\sin(2at)}{2a}\Big) - \frac{\cos(at)}{a^2}\Big[\frac{\sin^2(au)}{2}\Big]_0^t$$
$$= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{\sin(at)}{2a}\cdot\frac{\sin(2at)}{2a} - \frac{\cos(at)}{a^2}\cdot\frac{\sin^2(at)}{2},$$

wobei wir im dritten Schritt das Additionstheorem verwendet haben. Aus Letzterem erhält man weiter (wähle $x = y = at$), dass $\sin(2at) = 2\sin(at)\cos(at)$ gilt. Setzt man dies ein, so sieht man, dass die beiden letzten Terme sich gegenseitig aufheben, und man erhält das gewünschte Resultat

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\Big\} = \frac{t\sin(at)}{2a}.$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Klasse von Differentialgleichungen

$$my''(t) + fy(t) = K(t), \qquad \text{mit Anfangsbedingungen } y(0) = y_0 \text{ und } y'(0) = v_0, \tag{2}$$

deren Lösungen $y(t)$, $t \geq 0$, die Bewegung eines Federpendels der Masse $m > 0$ beschreiben, das an einer Feder der Federkonstante $f > 0$ hängt und der äusseren Kraft $K(t)$, ausgesetzt ist. Hier beschreibt y_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels. Es ist zweckmässig, die Grösse $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ einzuführen, die so genannte *Eigenfrequenz* des Pendels. Bestimmen Sie $y(t)$ in folgenden Fällen mittels Laplace-Transformation:

a) $K(t) \equiv 0$ (keine äussere Krafteinwirkung).

Lösung: Laplace-Transformation von (2) ergibt $m\mathcal{L}\{y''\}(s) + f\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$ (wobei wir auch die Linearität von $\mathcal{L}$ verwendet haben). Mit dem Transformationssatz für die Ableitung erhalten wir hieraus

$$m(s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - sy_0 - v_0) + f\mathcal{L}\{y\}(s) = 0,$$

und durch Auflösen nach $\mathcal{L}\{y\}(s)$ ergibt sich

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = y_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + v_0\frac{1}{s^2+\omega_0^2},$$

wobei wir $\omega_0^2 = f/m$ gesetzt haben. Rücktransformation in den Originalbereich ergibt nun wegen (1)

$$y(t) = y_0\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\Big\} + v_0\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\Big\} = y_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{3}$$

Aus (3) lesen wir ab, dass das Federpendel in Abwesenheit jeglicher äusseren Krafteinwirkung eine sinusförmige Bewegung mit der (Eigen-)Frequenz ω_0 beschreibt.

b) $K(t) = K\cos(\omega t)$, für gewisse $K, \omega > 0$, und mit $y_0 = v_0 = 0$. Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $\omega \neq \omega_0$ und $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall).

Lösung: Ähnlich wie in Teilaufgabe a) erhält man wegen $y_0 = v_0 = 0$ durch Anwendung des Ableitungssatzes

$$s^2\mathcal{L}\{y\}(s) + \omega_0^2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{m}\mathcal{L}\{K(t)\}(s),$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{m(s^2+\omega_0^2)}\mathcal{L}\{K(t)\}(s). \tag{4}$$

Da $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = s/(s^2+\omega^2)$ folgt, dass und damit

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}.$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung für die rechte Seite durch (alternativ kann man auch hier den Faltungssatz verwenden). Sei zunächst $\omega \neq \omega_0$. Mit dem üblichen Ansatz

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{A+Bs}{s^2+\omega^2} + \frac{C+Ds}{s^2+\omega_0^2}$$

für gewisse $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ erhalten wir nach Multiplikation auf beiden Seiten mit $(s^2 + \omega^2)(s^2+\omega_0^2)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} s &= (A+Bs)(s^2+\omega_0^2) + (C+Ds)(s^2+\omega^2) \\ &= (A\omega_0^2 + C\omega^2) + s(B\omega_0^2 + D\omega^2) + s^2(A+C) + s^3(B+D), \end{aligned} \tag{5}$$

wobei wir in der 2. Zeile die rechte Seite ausmultipliziert und nach Potenzen von s geordnet haben. Koeffizientenvergleich (in s) in (5) ergibt nun

$$A\omega_0^2 + C\omega^2 = 0 \tag{6}$$

$$B\omega_0^2 + D\omega^2 = 1 \tag{7}$$

$$A + C = 0 \tag{8}$$

$$B + D = 0. \tag{9}$$

Aus (6), (8) und der Tatsache, dass $\omega_0 \neq \omega$ schliesst man, dass $A = C = 0$ sein muss. Andererseits ergeben (7) und (9), dass

$$B = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad D = -B = \frac{-1}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Insgesamt haben wir also

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right),$$

und Rücktransformation ergibt

$$y(t) = \frac{K}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)),$$

also eine Superposition zweier harmonischer Schwingungen, jeweils mit der Eigenfrequenz ω_0 des Pendels und der Frequenz ω der Anregung.

Für den Fall $\omega = \omega_0$ erhalten wir stattdessen unter Verwendung von Aufgabe 2, dass

$$y(t) = \frac{K}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right\} = \frac{K}{m}\frac{t\sin(\omega t)}{2\omega}.$$

Dies ist eine Schwingung, deren Amplitude (dies ist der Faktor vor dem Sinusterm) *linear* mit der Zeit t wächst. Insbesondere gilt für die Auslenkung $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Weil die äussere Kraft genau die gleiche Frequenz hat wie die Eigenfrequenz des Pendels ($\omega = \omega_0$), überlagern sich beide Effekte konstruktiv. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Resonanz*.

c)

$$K(t) = \begin{cases} K, & \text{für } t \leq \tau \\ 0, & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

wobei $K, \tau > 0$, und mit $y_0 = v_0 = 0$ (konstante äussere Anregung der Dauer τ).

Lösung: Es gilt weiterhin (4), da die Annahmen $y_0 = v_0 = 0$ auch hier zutreffen. Man berechnet direkt

$$\mathcal{L}\{K(t)\}(s) = \int_0^\tau K e^{-st} dt = \frac{K}{s}(1 - e^{-s\tau}).$$

Damit gilt wegen (4)

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}(1 - e^{-s\tau})\frac{1}{s(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{K}{m\omega_0^2}(1 - e^{-s\tau})\Big[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\Big],$$

wobei der letzte Schritt mittels einer einfachen Partialbruchzerlegung folgt. Wir erinnern uns, dass $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ und $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2 + \omega_0^2)\} = \cos(\omega_0 t)$ (siehe (1)). Aus Linearität und mit dem Verschiebungssatz nach rechts ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{K}{m\omega_0^2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{(1 - e^{-s\tau})\Big[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\Big]\Big\}(t) \\
&= \frac{K}{m\omega_0^2}\Big[\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\Big\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\Big\{e^{-s\tau}\frac{1}{s}\Big\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\Big\{e^{-s\tau}\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\Big\}(t)\Big] \\
&= \frac{K}{m\omega_0^2}\Big[1 - \cos(\omega_0 t) - 1 \cdot \sigma(t - \tau) + \cos(\omega_0(t - \tau))\sigma(t - \tau)\Big],
\end{aligned}$$

wobei $\sigma(r) = 1$ für $r \geq 0$ und $\sigma(r) = 0$ für $r < 0$ bezeichnet. Da $1 - \cos(\omega_0 t) = 2\sin^2(\omega_0 t/2)$, lässt sich dies noch etwas vereinfachen zu

$$y(t) = \frac{K}{m\omega_0^2}\Big[\sin^2\Big(\frac{\omega_0 t}{2}\Big) - \sin^2\Big(\frac{\omega_0(t - \tau)}{2}\Big) \cdot \sigma(t - \tau)\Big].$$