ETH Zürich HS 2013
Prof. Dr. E. W. Farkas

Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 13

Aufgabe 1 (Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung)

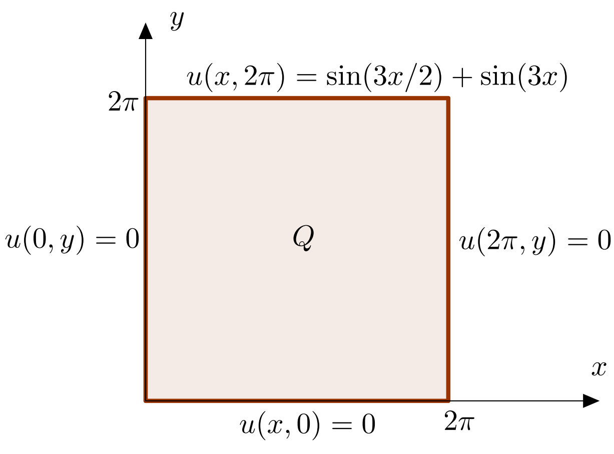
Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung $u(x, y)$ auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 2\pi)$. Drei Seiten von Q werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte $u(x, \pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x)$. Die gesuchte Funktion u erfüllt also

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ auf } Q, \text{ und } \begin{cases} u(0,y) = 0 & \text{für } 0 < y < 2\pi \\ u(2\pi, y) = 0 & \text{für } 0 < y < 2\pi \\ u(x,0) = 0 & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ u(x, 2\pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x) & \text{für } 0 < x < 2\pi \end{cases} \tag{1}$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.

Hinweis: Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für X periodische Lösungen auftreten.

Lösung: Wir haben folgende Situation:



In Q gilt $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Der Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ liefert $X''Y + XY'' = 0$, und damit

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Da die linke Seite nur von x abhängt und die rechte nur von y, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ sind. Die Randbedingungen fordern eine periodische Lösung für X. Für $C \geq 0$ besitzt die Differentialgleichung $X'' = CX$ nur die (triviale) periodische Lösung $X \equiv 0$. Wir nehmen also an, dass $C < 0$ ist, und setzen $C = -\omega^2$ für gewisses $\omega > 0$ (dies erweist sich später als zweckmässig). Wir erhalten insgesamt $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\omega^2$ und damit

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 & \text{(DE1)} \\ Y'' - \omega^2 Y = 0 & \text{(DE2)} \end{cases}.$$

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für X unter Beachtung der Randbedingungen $X(0) = X(2\pi) = 0$.

Lösung: (DE1) ergibt

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Aus $X(0) = 0$ folgt $A = 0$, und aus $X(2\pi) = 0$ folgt $\sin(\omega 2\pi) = 0$. Somit erhalten wir $\omega = n/2$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (wobei zu beachten ist, dass wir negative Werte von n ausgelassen haben, so dass die Lösungen linear unabhängig sind, und der Fall $n = 0$ liefert nur die triviale Lösung $X \equiv 0$). Also erhalten wir

$$X_n(x) = B_n \sin(nx/2), \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathbb{R}.$$

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für Y unter Beachtung der Randbedingung $Y(0) = 0$.

Lösung: (DE2) ergibt

$$Y(y) = C\mathrm{e}^{\omega y} + D\mathrm{e}^{-\omega y}.$$

Aus $Y(0) = 0$ folgt $D = -C$. Aus b) wissen wir, dass $\omega = n/2$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also erhalten wir die Lösungen

$$Y_n(y) = C_n(\mathrm{e}^{ny/2} - \mathrm{e}^{-ny/2}),\ n \in \mathbb{N},\ C_n \in \mathbb{R}.$$

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x, y)$.

Lösung: Wir haben die Basislösungen $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ gefunden. Durch Superposition erhalten wir

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx/2)(\mathrm{e}^{ny/2} - \mathrm{e}^{-ny/2}), \tag{2}$$

wobei wir $A_n = B_n C_n$ gesetzt haben. Um die Koeffizienten A_n zu bestimmen, setzen wir $y = 2\pi$ und erhalten aus der Randbedingung, dass

$$u(x, 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx/2)(\mathrm{e}^{n\pi} - \mathrm{e}^{-n\pi}) \sin(nx/2) = \sin(3x/2) + \sin(3x)$$

gelten muss. Mittels Koeffizientenvergleich sieht man, dass

$$A_3 = \frac{1}{\mathrm{e}^{3\pi} - \mathrm{e}^{-3\pi}},\ A_6 = \frac{1}{\mathrm{e}^{6\pi} - \mathrm{e}^{-6\pi}} \text{ und } A_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{3, 6\}.$$

Also erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin(3x/2)\frac{\mathrm{e}^{3y/2} - \mathrm{e}^{-3y/2}}{\mathrm{e}^{3\pi} - \mathrm{e}^{-3\pi}} + \sin(3x)\frac{\mathrm{e}^{3y} - \mathrm{e}^{-3y}}{\mathrm{e}^{6\pi} - \mathrm{e}^{-6\pi}} \\ &= \sin(3x/2)\frac{\sinh(3y/2)}{\sinh(3\pi)} + \sin(3x)\frac{\sinh(3y)}{\sinh(6\pi)}. \end{aligned}$$

e) Wie lautet die Lösung von (1), wenn die Randbedingung $u(x, 2\pi) = \sin(3x/2) + \sin(3x)$ für $0 < x < 2\pi$ durch

$$u(x, 2\pi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x - 4, & \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases} \tag{3}$$

ersetzt wird? *Hinweis:* Verwenden Sie Serie 10, Aufgabe 1.

Lösung: die allgemeine Lösung (2) gilt noch in diesem Fall (die Randbedingung auf dem Segment $0 < x < 2\pi$, $y = 2\pi$ wurde zur Herleitung von (2) nicht verwendet). Insbesondere gilt weiterhin

$$u(x, 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mathrm{e}^{n\pi} - \mathrm{e}^{-n\pi}) \sin(nx/2).$$

Um die Koeffizienten A_n zu bestimmen, gehen wir wie in Teilaufgabe d) vor. Aus Serie 10, Aufgabe 1 ist die Fourierentwicklung von (3) bekannt. Es gilt

$$u(x, 2\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2} \sin((2k+1)x).$$

Damit erhalten wir die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mathrm{e}^{n\pi} - \mathrm{e}^{-n\pi}) \sin(nx/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2} \sin((2k+1)x).$$

Koeffizientenvergleich ergibt $A_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausser wenn $n = 2(2k+1)$ für $k \ge 0$, und

$$A_{2(2k+1)} = \frac{8(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{2(2k+1)\pi} - \mathrm{e}^{-2(2k+1)\pi}} = \frac{4(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2 \cosh(2(2k+1)\pi)}$$

für alle $k \ge 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2(2k+1)} \sin((2k+1)x)(\mathrm{e}^{(2k+1)y} - \mathrm{e}^{-(2k+1)y}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2} \frac{\cosh((2k+1)y)}{\cosh(2(2k+1)\pi)} \sin((2k+1)x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Eindimensionale Wellengleichung)

Wir betrachten die lineare partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung einer eindimensionalen Welle.

a) Bestimmen Sie die Lösung von (4) mit Anfangsdaten $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ und bestimmen Sie f und g aus den Anfangsdaten.

Lösung: Wir prüfen zunächst, dass der Ansatz $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ tatsächlich die Wellengleichung löst. Mit der Kettenregel gilt $u_t = c(f(x+ct) - g(x-ct))$, $u_{tt} =$

$c^2(f(x+ct)+g(x-ct))$ und auf ähnliche Weise $u_{xx} = c^2(f(x+ct)+g(x-ct))$. Mit den Anfangsdaten erhalten wir

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

und

$$u_t(x,0) = c(f'(x) - g'(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da $c \neq 0$, folgt $f'(x) = g'(x)$, d.h. $g(x) = f(x) + K$. Nun

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 2f(x) + K = \phi(x) \\ f(x) &= (\phi(x) - K)/2 \\ g(x) &= (\phi(x) + K)/2 \\ u(x,t) &= f(x+ct) + g(x-ct) = (\phi(x+ct) + \phi(x-ct))/2. \end{aligned}$$

b) (∗) Sei nun allgemeiner $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$. Bestimmen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Lösung: Mit dem selben Ansatz wie in a), $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, erhalten wir wiederum (5), aber nunmehr $u_t(x,0) = c(f'(x) - g'(x)) = \psi(x)$, also

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c}\psi(x)$$

Um daraus eine Bedingung an $f - g$ zu erhalten, integrieren wir. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gemäss dem Fundamentalsatz der Analysis gilt

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_a^x \psi(y)dy - (f(a) - g(a)). \tag{6}$$

Addition und Subtraktion von (5) und (6) ergibt dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\Big[\phi(x) + \frac{1}{c}\int_a^x \psi(y)dy - (f(a) - g(a))\Big] \\ g(x) &= \frac{1}{2}\Big[\phi(x) - \frac{1}{c}\int_a^x \psi(y)dy + (f(a) - g(a))\Big]. \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblemes lautet somit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x+ct) + g(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\phi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_a^{x+ct} \psi(y)dy - (f(a) - g(a))\Big] \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[\phi(x-ct) - \frac{1}{c}\int_a^{x-ct} \psi(y)dy + (f(a) - g(a))\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\phi(x+ct) + \phi(x-ct) + \frac{1}{c}\int_a^{x+ct} \psi(y)dy - \frac{1}{c}\int_a^{x-ct} \psi(y)dy\Big]. \end{aligned}$$

Wegen $\int_a^{x-ct} \psi(y)dy + \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy = \int_a^{x+ct} \psi(y)dy$ erhalten wir hieraus

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\phi(x+ct) + \phi(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy\Big] \quad \text{(d'Alembert'sche Formel)}.$$

Die Lösung von a) ergibt sich im Spezialfall $\Psi \equiv 0$.