Koordinator
Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 2

Aufgabe 1 (Repetition lineare Algebra)

Seien im Folgenden

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie BA; B^{-1}; AB^5.

Lösung:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter überprüft man leicht, dass $B^{-1} = B$ gilt. Damit folgt $B^2 = BB^{-1} = \mathbb{1}$ und somit

$$AB^5 = AB^2B^2B = A\mathbb{1}\mathbb{1}B = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinanten von $(2A)^2 B^3$ und $\left(A^T + B\right)^T$.

Lösung: Mit den Sätzen $\det AB = \det A \cdot \det B$ und $\det A^T = \det A$ folgt aus

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-2+3) - (1+8) = -8,$$

und $\det B = -1$ sowie $B^T = B$

$$\det\left[(2A)^2 B^3\right] = [\det(2A)]^2 \cdot [\det B]^3 = [2^3 \det A]^2 \cdot [\det B]^3 = 2^6(-8)^2 \cdot (-1)^3 = -2^{12},$$

$$\det[A^T + B]^T = \det[A + B^T] = \det[A + B] = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot 3 - (4 \cdot 2) = -2.$$

c) Geben Sie die Eigenwerte von A an.

Lösung:

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 4]}_{=\lambda^2-5} + \underbrace{(3 + (-1-\lambda))}_{=2-\lambda} \stackrel{!}{=} 0.$$

Also sind die **Eigenwerte** von A

$$\lambda_1 = 2\,(\text{doppelter EW})\,,\ \lambda_2 = -2\,.$$

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Da $\det A = -8 \neq 0$ gibt es genau eine Lösung dieses Gleichungssystems. Wir berechnen mit Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{3.Z.<->1.Z.}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{3.Z.-2(1.Z.)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\overset{3.Z.+5(2.Z.)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

damit ist die (eindeutige) Lösung gegeben durch

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

e) Finden Sie, falls möglich, Zahlen s und t so, dass das Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. Begründen Sie andernfalls die Unmöglichkeit.

Lösung: Weil $\det A = -8 \neq 0$ ist es **unmöglich** Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass $A\underline{x} = \underline{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung von

$$y' = x + y, \text{ mit } y(0) = 0. \tag{1}$$

Lösung: Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung $y' - y = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda - 1$ hat die Nullstelle $\lambda = 1$, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$. Gemäss Methode der Variation der Konstanten macht man zur Lösung von (1) den Ansatz

$$y(x) = C(x) \cdot e^x, \tag{2}$$

mit zu bestimmender Funktion $C(x)$. Einsetzen von (2) in (1) ergibt die Bedingung $C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x$, und damit $C'(x) = xe^{-x}$. Partielle Integration liefert

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + A,$$

mit $A \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (2) ergibt $y(x) = -(1+x) + Ae^x$. Weiter erhält man A aus der Bedingung $y(0) = -1 + A = 0$, also $A = 1$. Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = +e^x - x - 1.$$

Aufgabe 3*

Man betrachte ein biologisches Populationsmodell, bei welchem die Grösse $y(t)$ der Population zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch die (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung

$$y' = wy - sy^2, \qquad \text{mit } y(0) = y_0, \tag{3}$$

für gegebene Parameter $w, s > 0$ und Anfangspopulation $y_0 \geq 0$. Die Interpretation ist wie folgt: unter Vernachlässigung des zweiten Terms ist die Wachstumsrate y' proportional zur Anzahl y der Individuen mit Proportionalitätsfaktor w (genannt Wachstumskonstante). Der zweite Term modelliert die Tatsache, dass sich bei zunehmender Population die Individuen durch (Zweier-)stösse gegenseitig behindern und das Wachstum damit gehemmt wird (s heisst in diesem Zusammenhang Stossparameter).

a) Für welche Werte von $y_0 \geq 0$ (in Abhängigkeit von w und s) ist die Lösung des Anfangswertproblems (3) zeitlich konstant, i.e. $y'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$?

Lösung: Aus (3) sieht man sofort, dass $y' = sy(\frac{w}{s} - y)$ gilt, mit konstanten Lösungen $y = 0$ und $y = \frac{w}{s}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von (3) (in Abhängigkeit von w und s) für gegebene Anfangspopulation y_0 mit $0 < y_0 < \frac{w}{s}$ und interpretieren Sie Ihre Lösung. (*Hinweis*: es gilt $\frac{a}{y(a-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}$, für beliebige $a \in \mathbb{R}$, $y \neq 0, a$).

Lösung: Die gegebene Differentialgleichung ist separierbar. Man erhält also

$$\int \frac{\frac{w}{s}}{y(\frac{w}{s} - y)} dy = \int w dt,$$

und unter Verwendung des Hinweises (mit $a = w/s$)

$$wt + C = \int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{w}{s} - y}\right] dy = \log|y| - \log\left|\frac{w}{s} - y\right|, \text{ für gewisses } C \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ergibt sich, dass $C = \log|y_0| - \log|\frac{w}{s} - y_0|$, also gilt

$$wt = \log\left|\frac{y}{y_0}\right| - \log\left|\frac{\frac{w}{s} - y}{\frac{w}{s} - y_0}\right|. \tag{4}$$

Weil $y_0 \in (0, w/b)$ ist, folgt aus Eindeutigkeit, dass die gesuchte Lösungsfunktion $y(t)$ die Achsen $y = 0$ und $y = w/b$ nicht schneiden darf, i.e. $0 < y(t) < w/b$ muss für alle $t \geq 0$ gelten. Die Terme zwischen den Betragstrichen in (4) sind daher stets positiv, und man darf deswegen die Betragstriche weglassen. Aus (4) folgt nun

$$e^{wt} = \frac{\frac{y}{y_0}}{\frac{\frac{w}{s} - y}{\frac{w}{s} - y_0}}$$

und Auflösen nach y ergibt die gesuchte Lösung

$$y(t) = \frac{w}{s} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - \frac{w}{s})e^{-wt}}, \text{ für } t \geq 0. \tag{5}$$

Die Funktion $y(t)$ ist für $0 < y_0 < w/s$ monoton wachsend, das heisst, die Anfangspopulation y_0 ist so niedrig, dass das Wachstum überwiegt. Bei zunehmender Population fällt jedoch die gegenteilige Stosswirkung immer mehr ins Gewicht und im Limes $t \to \infty$ konvergiert die Funktion $y(t)$ gegen die (Gleichgewichts-)lösung $y = w/s$ (In diesem Zustand machen sich die gegenteiligen Einflüsse gerade wett).

c) Was geschieht im Fall $y_0 > \frac{w}{s}$?

Lösung: Man vergewissert sich leicht, dass in diesem Fall die Lösung ebenfalls durch (5) gegeben ist. Die Funktion ist aber nunmehr monoton fallend, weil die Anfangspopulation y_0 zu hoch ist, und die (negativ beeinflussende) Stosswirkung überwiegt. Es gilt weiterhin $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{w}{s}$. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem sogenannten *stabilen* Gleichgewicht.