ETH Zürich HS 2013 | Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas | Pierre-François Rodriguez

Mathematatik III - D-HEST

Lösung 3

Aufgabe 1

Sei

$$y' - y = (xy)^2, \text{ mit } y \neq 0. \tag{1}$$

a) Führen Sie die Variablensubstitution $u = 1/y$ durch, um eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung in u zu erhalten.

Lösung: Da aus Annahme $y \neq 0$ gilt, kann die Differentialgleichung (1) umgeschrieben werden zu $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = x^2$. Mit $u = \frac{1}{y}$ gilt $u' = \frac{-y'}{y^2}$, also erhält man

$$-u' - u = x^2. \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

Lösung: Die Differentialgleichung (2) ist linear und inhomogen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $u_{\text{hom}}(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung von (2) erhält man zum Beispiel durch den Ansatz $u_{\text{part}}(x) = ax^2 + bx + c$, mit zu bestimmenden Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (2) ergibt

$$u'_{\text{part}} + u_{\text{part}} = 2ax + b + ax^2 + bx + c = -x^2$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man $a = -1$, $b = -2a = 2$ und $c = -b = -2$. Damit lautet die allgmeine Lösung von (2) $u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$, und die der ursprünglichen Differentialgleichung (1)

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = (Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2)^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung von

$$y' = \cos(x) - y, \text{ mit } y\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie durch wiederholte partielle Integration, dass $\int \cos(x)e^x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, gilt.

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $y' + y = 0$ hat die Lösung $y(x) = Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$. Variation der Konstanten liefert den Ansatz $y(x) = K(x)e^{-x}$, und Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} = \cos(x) - K(x)e^{-x}$, also

$$\begin{aligned} K(x) = \int \cos(x)e^x dx &= \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx + C \\ &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx + C \\ &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - K(x) + C, \end{aligned}$$

und damit $K(x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + A$, für $A \in \mathbb{R}$. Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$. Wegen $\cos(3\pi/4) = -\sin(3\pi/4)$ folgt aus $y(3\pi/4) = 1$, dass $A = e^{\frac{3\pi}{4}}$ sein muss. Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + e^{\frac{3\pi}{4} - x}.$$

Aufgabe 3

Für ein Medikament sei folgendes 2-Box-Kompartiment-Modell mit $0 < b < 1$ gegeben:

$$\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{\quad b \quad} \boxed{\text{Leber}}$$

Dies bedeutet, dass das Medikament mit einer Rate proportional zur Medikamentenmenge im Blut (und Proportionalitätskonstante b) in die Leber fliesst. Zur Zeit $t \geq 0$ sei die Medikamentenmenge im Blut $y_1(t)$, in der Leber sei sie $y_2(t)$.

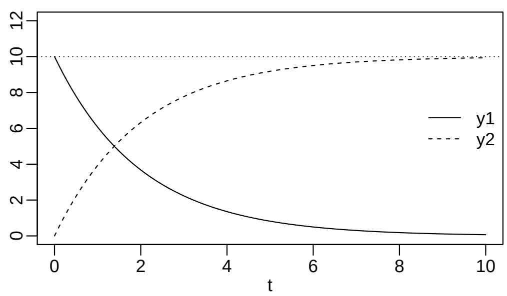
a) Zu Beginn $t = 0$ sei sie im Blut gleich $y_{1,0}$ und in der Leber gleich 0. Bestimmen Sie die Entwicklungen der Medikamentenmenge

$$t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $y_{1,0} = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

Lösung:

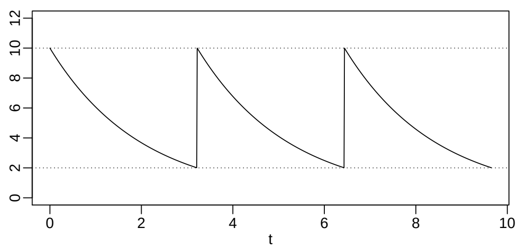
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -by_1(t), \quad y_1(0) = y_{1,0} && \Rightarrow y_1(t) = y_{1,0}e^{-bt} \\ y_2'(t) &= by_1(t) = by_{1,0}e^{-bt}, \quad y_2(0) = 0 && \Rightarrow y_2(t) = y_{1,0}(1 - e^{-bt}) \end{aligned}$$



b) Um eine Mindestmenge $y_{1,1}$ im Blut mit $0 < y_{1,1} < y_{1,0}$ zu sichern, muss die Infusion mit $y_{1,0}$ periodisch wiederholt werden. Bestimmen Sie die Periode in Abhängigkeit von $b, y_{1,0}, y_{1,1}$ und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

Lösung:

$$y_1(T) = y_{1,0}e^{-bT} = y_{1,1} \quad \Rightarrow e^{-bT} = \frac{y_{1,1}}{y_{1,0}} \quad \Rightarrow T = \frac{1}{b}(\ln y_{1,0} - \ln y_{1,1})$$

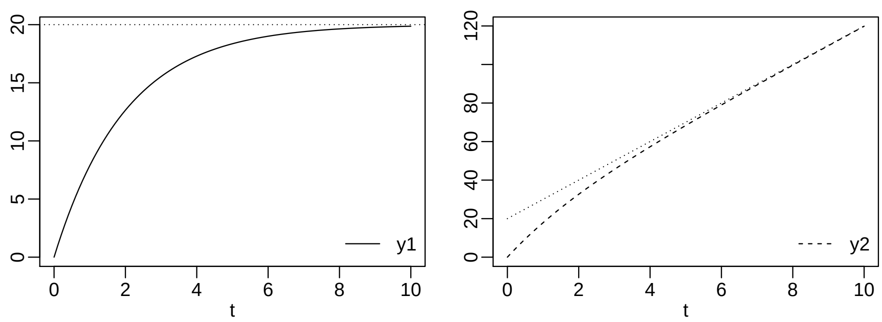


c) Man nehme nun an, dass dem Blut durch eine konstante Infusion eine Medikamentenmenge mit Rate $g > 0$ zugefürt wird. Zu Beginn sei in beiden Kompartimenten die Menge gleich 0.

i. Zeichnen Sie das zugehörige Kompartiment-Modell, bestimmen Sie die Entwicklungen $t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$ und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $g = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

Lösung: $g \longrightarrow \boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{b} \boxed{\text{Leber}}$

$$
\begin{aligned}
& y_1'(t) = g - by_1(t) \quad \text{(Variation der Konstanten)} \Rightarrow y_1(t) = Q(t)e^{-bt} \\
\Rightarrow\ & y_1'(t) = Q'(t)e^{-bt} - by_1(t) \quad \Rightarrow Q'(t) = ge^{bt} \quad \Rightarrow Q(t) = \frac{g}{b}e^{bt} + C \\
\Rightarrow\ & y_1(t) = \frac{g}{b} + Ce^{-bt}, \quad y_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{y_1(t) = \tfrac{g}{b}(1 - e^{-bt})} \\
& y_2'(t) = g(1 - e^{-bt}) \quad \Rightarrow y_2(t) = g\int(1 - e^{-bt})dt = gt + \frac{g}{b}e^{-bt} + C \\
& y_2(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y_2(t) = gt + \tfrac{g}{b}(e^{-bt} - 1)}
\end{aligned}
$$



ii. Angenommen, man unterbreche die Infusion bei $t = T_1$ mit einer Menge im Blut Y_1. Bestimmen Sie den Verlauf für $t \geq T_1$. Um eine Mindestmenge von Y_2 zu garantieren, starte die Infusion wieder zum Zeitpunkt T_2. Bestimmen Sie T_2 und skizzieren Sie den Verlauf zwischen Y_1 und Y_2.

Lösung: Die Infusion wird unterbrochen, wenn $y_1(T_1) = \frac{g}{b}(1 - e^{-bT}) = Y_1$. Für $t \geq T_1$ entwickelt das System wie bei a), mit Anfangskonzentration Y_1:

$$y_1(t) = Y_1 e^{-b(t-T_1)}$$

Starten wir wieder bei T_2 für die Mindestmenge Y_2, ist

$$Y_2 = Y_1 e^{-b(T_2-T_1)} \Rightarrow e^{b(T_2-T_1)} = \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{1}{b}\left(\ln \frac{Y_1}{Y_2}\right)$$