ETH Zürich HS 2013 | Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas | Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 4

Eine $n \times n$-Matrix heisst *diagonalisierbar*, falls sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Die Bezeichnung ergibt sich aus folgender Tatsache: ist A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, $Av_i = \lambda_i v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ mit $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, und $P = (v_1 \dots v_n)$ die (invertierbare) quadratische Matrix mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$, dann gilt

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{1}$$

wobei $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen bezeichnet.

Aufgabe 1

Berechnen Sie e^A für folgende Matrizen A:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B + C$. Da $CB = BC$ ist $e^A = e^{B+C} = e^B \cdot e^C$.
Es ist $e^B = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$ und $e^C = E_2 + C + \frac{1}{2}C^2 + \dots$.
Da $C^2 = 0$, ist $e^C = E_2 + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also $e^A = e^B \cdot e^C = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. *Hinweis*: diese Matrix ist diagonalisierbar. Verwenden Sie (1).

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist $(5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Für die Eigenvektoren erhält man zum Beispiel $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $P = (v_1\, v_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man $\det(P) = 1$ und $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Gemäss (1) gilt also

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$$

Daraus ergibt sich $A = PDP^{-1}$, $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ und allgemein $A^n = PD^nP^{-1}$, für $n \geq 0$. Man erhält

$$\begin{aligned} e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} = P \sum_{n \geq 0} \frac{D^n}{n!} P^{-1} = Pe^DP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-1} + 2e^2 & -2e^{-1} + 2e^2 \\ e^{-1} - e^2 & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$ erfülle das DGL-System $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses DGL-Systems mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren von A, und lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Erst berechnen wir die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 2\, \lambda_2 = 5. \end{aligned}$$

Für die Eigenvektoren gilt $Av_i = \lambda_i v_i$, also lösen wir $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2: \\ &\begin{cases} 3a + 2b = 2a \\ a + 4b = 2b \end{cases} \Rightarrow a = -2b \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\lambda_2 = 5: \\ &\begin{cases} 3a + 2b = 5a \\ a + 4b = 5b \end{cases} \Rightarrow a = b \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit $y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt die Bedingungen $-2C_1 + C_2 = -3$ und $C_1 + C_2 = 3$, woraus man $C_1 = 2$ und $C_2 = 1$ berechnet. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = 2e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise wie in Aufgabe 1 c) die Matrix e^{tA}, $t \geq 0$.

Lösung: Aus a) und (1) erhält man $A = PDP^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich, für $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{5t} & -2e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{2t} - e^{5t} & 2e^{2t} - 2e^{5t} \\ e^{2t} - e^{5t} & -e^{2t} - 2e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie mithilfe von b) die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ erneut und vergleichen Sie mit a).

Lösung: Für alle $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} y(t) = e^{At} y(0) &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{2t} - e^{5t} & 2e^{2t} - 2e^{5t} \\ e^{2t} - e^{5t} & -e^{2t} - 2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{2t} - e^{5t} & 2e^{2t} - 2e^{5t} \\ e^{2t} - e^{5t} & -e^{2t} - 2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{2t} + e^{5t} \\ 2e^{2t} + e^{5t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wie in (2).

Aufgabe 3*

In dieser Aufgabe soll die Identität

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Sp}(A)} \tag{3}$$

für beliebige *diagonalisierbare* $n \times n$-Matrizen überprüft werden (hier bezeichnet $\mathrm{Sp}(A)$ die Spur von A, i.e. die Summe der Diagonalelemente von A). Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

a) Bestimmen Sie $\det(e^A)$ in Abhängigkeit von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ unter Verwendung von (1).

Lösung: Aus (1) folgt, dass $e^A = Pe^DP^{-1}$, wobei $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $P = (v_1 \dots v_n)$ (siehe Aufgabe 1c)). Also erhält man

$$\begin{aligned}\det(e^A) &= \det(Pe^DP^{-1}) = \det(P)\det(e^D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(e^D)\det(P)^{-1} \\ &= \det(e^D) = \det(\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.\end{aligned} \tag{4}$$

b) Zeigen Sie, dass die Spur *zyklisch* ist, d.h. für beliebige $n \times n$-Matrizen B, C gilt $\mathrm{Sp}(BC) = \mathrm{Sp}(CB)$.

Lösung: Seien $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ und $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Sei $(BC)_ij$ der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Produktmatrix BC, für $1 \le i, j \le n$. Aus Definition gilt $(BC)_ij = \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj}$. Weiterhin ist

$$\mathrm{Sp}(BC) = \sum_{i=1}^n (BC)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki}b_{ik} = \mathrm{Sp}(CB).$$

c) Bestimmen Sie den Ausdruck $e^{\mathrm{Sp}(A)}$ in Abhängigkeit von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ unter Verwendung von (1) und b).

Lösung: Aus b) erhält mit $B = P$ und $C = DP^{-1}$, dass $\mathrm{Sp}(PDP^{-1}) = \mathrm{Sp}(DP^{-1}P) = \mathrm{Sp}(D)$ gilt, also erhält man

$$e^{\mathrm{Sp}(A)} \overset{(1)}{=} e^{\mathrm{Sp}(PDP^{-1})} = e^{\mathrm{Sp}(D)} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \tag{5}$$

d) Folgern Sie (3) aus a) und c).

Lösung: Die Behauptung (3) folgt nun unmittelbar aus (4) und (5).

Bemerkung: tatsächlich gilt (3) für beliebige $n \times n$-Matrizen. Insbesondere folgt hieraus, dass e^A für beliebige $n \times n$-Matrix A stets invertierbar ist, da die rechte Seite nie verschwindet.