Mathematik III - D-HEST

Lösung 5

Aufgabe 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 7y' + 6y = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

Lösung: Die charakteristische Gleichung von (1) lautet $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$, mit Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -3$. Da keine doppelten Nullstellen vorkommen, bilden die Funktionen

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{2t}, \quad y_3(t) = e^{-3t}, \tag{2}$$

ein Fundamentalsystem für (1) (siehe Kap. 1, Satz 3.49), die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t}, \text{ für } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir betrachten nun $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, wobei $y(t)$ eine (beliebige) Lösung von (1) sei. Die Funktion $Y(t)$ erfüllt das DGL-System

$$Y'(t) = AY(t). \tag{3}$$

Bestimmen Sie A (diese Matrix heisst *Begleitmatrix* zur Differentialgleichung (1)).

Lösung: Es gilt $y''' = 7y' - 6y$ und damit

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = AY(t), \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Überprüfen Sie, dass die Eigenwerte von A genau durch die Lösungen der zur Differentialgleichung (1) assoziierten charakteristischen Gleichung $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ gegeben sind.

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 7) - 6 = -\lambda^3 + 7\lambda - 6.$$

Damit sind die Eigenwerte von A genau die Lösungen von $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$, i.e. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -3$, wie in a) berechnet.

d) Geben Sie ein Fundamentalsystem $Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)$ für (3) an (i.e. $Y_1(t), ..., Y_3(t)$ erfüllen jeweils (3) und sie sind linear unabhängig). Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Man setzt

$$Y_n(t) = \begin{pmatrix} y_n(t) \\ y_n'(t) \\ y_n''(t) \end{pmatrix}, \text{ für n=1,2,3,}$$

wobei y_n die Funktionen aus (2) sind. Da y_n insbesondere eine Lösung von (1) ist, gilt wegen b), dass $Y_n'(t) = AY_n(t)$, für $n = 1, 2, 3$. Weiter berechnet man

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

umd die gewünschte Unabhängigkeit folgt aus

$$W(t) := \det(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ von (4).

Lösung: Analog zur vorigen Aufgabe erhält man die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$, mit Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Da es eine doppelte Nullstelle gibt, bilden gemäss Satz 3.49 in Kap. 1 die Funktionen

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = te^t, \quad y_3(t) = e^{2t}, \tag{5}$$

ein Fundamentalsystem für (1), und die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 e^{2t}, \text{ für } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Geben Sie die Begleitmatrix A zu (4) an und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das DGL-System $Y'(t) = AY(t)$.

Lösung: Analog zu Aufgabe 2b) erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für das Fundamentalsystem $Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)$ zu $Y'(t) = AY(t)$ setzt man ähnlich wie in Aufgabe 2d) $Y_n(t) = \begin{pmatrix} y_n(t) \\ y_n'(t) \\ y_n''(t) \end{pmatrix}$, für $n = 1, 2, 3$, mit y_n aus (5), also

$$Y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t + te^t \\ e^t + te^t + e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungen sind unabhängig, da für die zugehörige Wronski-Determinante

$$W(t) := \det(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)) = e^4 t \det \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & 2 \\ 1 & t+2 & 4 \end{pmatrix} = e^{4t} \neq 0$$

gilt.

Aufgabe 3

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b, \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}, \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: es gilt $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Man schreibt $tA = B + C$ mit $B = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}$ und überprüft leicht, dass $BC = CB$ gilt. Da B eine Diagonalmatrix ist, hat man $e^B = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} = e^{at} E$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Identitätsmatrix bezeichnet. Insgesamt erhält man

$$e^{tA} = e^{B+C} \stackrel{BC=CB}{=} e^B \cdot e^C = e^{at} e^C. \tag{6}$$

Nun muss $e^C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!}$ berechnet werden. Dazu untersucht man die Potenzen C^n, für $n \geq 1$. Man erhält

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} \\
C^2 &= \begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix} = -(bt)^2 E, \\
C^3 &= C^2 C = -(bt)^2 C = \begin{pmatrix} 0 & (bt)^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix} \\
C^4 &= C^2 C^2 = (-(bt)^2 E)(-(bt)^2 E) = \begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und allgemein (man betrachte gerade und ungerade Potenzen separat)

$$C^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n (bt)^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n (bt)^{2n} \end{pmatrix}, \quad C^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n (bt)^{2n+1} \\ (-1)^n (bt)^{2n+1} & \end{pmatrix}, \tag{7}$$

für alle $n \geq 0$. Also ergibt sich

$$
\begin{aligned}
e^C &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{C^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{C^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&\overset{(7)}{=} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(bt)^{2n} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(bt)^{2n} \end{pmatrix} + \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(bt)^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(bt)^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(bt) & 0 \\ 0 & \cos(bt) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wobei in der vorletzten Zeile der Hinweis verwendet wurde. Einsetzen in (6) ergibt das gewünschte Resultat.

b) Bestimmen Sie die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, welche das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, für $t \geq 0$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Lösung: Die gesuchte Lösung lautet (siehe Kap.1, Satz 3.46)

$$
\begin{aligned}
y(t) = e^{tA} y(0) &\overset{a)}{=} e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) - \sin(bt) \\ \sin(bt) + \cos(bt) \end{pmatrix} = e^{at} \cos(bt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{at} \sin(bt) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$