ETH Zürich HS 2013 Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST

Lösung 6

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes 3-Box-Kompartiment-Modell für $0 < a, b, c < 1$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Muskel}} \arrow[r, "a"'] & \boxed{\text{Blut}} \arrow[r, "b"'] & \boxed{\text{Leber}} \arrow[l, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

a) Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.

Lösung:

$$y' = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & c \\ 0 & b & -c \end{pmatrix} y.$$

b) Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$, welche nicht von t abhängt.

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $p_A(\lambda) = (-a - \lambda)((-b - \lambda)(-c - \lambda) - bc)$. Eine der Nullstellen (Eigenwerte) ist $\lambda = 0$. Mit einem dazugehörigen EV $v \neq 0$ ist $\{t \mapsto y^\infty(t) = e^{0t}v = v\}$ eine von t unabhängige Lösung, ein stationärer Zustand.

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ für $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$.

Lösung: Die Matrix $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = -1, -\frac{2}{3}, 0$ mit Eigenvektoren

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die drei Eigenwerte einfach sind (sie sind alle paarweise verschieden), ergibt sich mit den drei linear unabhängigen EV ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$:

$$\left\{ t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-2t/3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$. *Hinweis:* Betrachten Sie $J = T^{-1}AT$, mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrix $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3}, 0$, mit dem doppelten EW $-\frac{2}{3}$. Wir folgen dem Hinweis und berechnen $J = T^{-1}AT$. Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

und damit

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(N.B.: dies ist die so genannte Jordan-Normalform von A). Damit gilt $A = TJT^{-1}$, $A^2 = TJT^{-1}TJT^{-1} = TJ^2T^{-1}$ und allgemein $A^n = TJ^nT^{-1}$, für $n \geq 0$, und daher

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} TJ^nT^{-1} = T\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tJ)^n\Big]T^{-1} = Te^{tJ}T^{-1}. \tag{1}$$

Um e^{tJ} zu berechnen, schreiben wir $J = J_1 + J_2$ mit

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $J_1J_2 = J_2J_1$, und dass $J_2^2 = 0$, also folgt, dass

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2}{3}t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ_2} = E + tJ_2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insegesamt erhalten wir

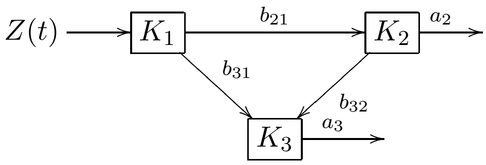
$$\begin{aligned} e^{tA} &\overset{(1)}{=} Te^{tJ}T^{-1} \overset{J_1J_2=J_2J_1}{=} Te^{tJ_1}e^{tJ_2}T^{-1} \\ &= Te^{-2t/3}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t/3} \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2t + 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} + 1) & 3(e^{2t/3} - 1) \\ -2t + 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} + 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung y des gegebenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y(t) = e^{tA}y(0) &= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2t + 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} + 1) & 3(e^{2t/3} - 1) \\ -2t + 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} - 1) & 3(e^{2t/3} + 1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 2t - 3(e^{2t/3} + 1) \\ -2t - 3(e^{2t/3} + 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$:



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell wird beschrieben durch

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t), \text{ für } t \geq 0, \tag{2}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -(b_{31}+b_{21}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2+b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix} \quad g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Seien alle Raten gleich $\frac{1}{2}$ und die Zufuhr konstant gleich 2. Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, und berechnen Sie diesen.

Lösung: Es sind $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Es gibt einen stationären Zustand y_∞ genau dann, wenn y' konstant $= 0$. Dies genau dann der Fall, wenn

$$A \cdot y + g = 0 \implies A \cdot y = -g$$

Da A invertierbar ist, ist $y_\infty = -A^{-1} \cdot g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Seien die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$, $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems (2).

Hinweis: prüfen Sie, dass $T^{-1}AT = D$ für eine geeignete Diagonalmatrix D und mit

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und betrachten Sie $x(t) = T^{-1}y(t)$.

Lösung: Es ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ diagonalisierbar mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = D$$

Setze $x(t) = T^{-1}y(t)$ also $y(t) = Tx(t)$ und $y'(t) = Tx'(t)$

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) \implies Tx'(t) = A \cdot Tx(t) + g(t)$$

$$\implies x'(t) = (T^{-1}AT)\cdot x(t) + T^{-1}g(t) = D\cdot x(t) + h(t),$$

wobei $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2,-2,2)^\top = e^{-t}k$.
Da D diagonal ist, sind die DGLs entkoppelt. Diese haben die Form $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + k_i e^{-t}$, und können mittels Variation der Konstanten gelöst werden.

Ansatz: $x_i(t) = C(t)e^{\lambda_i t}$.

$$\begin{aligned}
(C'(t) + \lambda_i C(t))e^{\lambda_i t} &= \lambda_i C(t)e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t}\\
C'(t)e^{\lambda_i t} &= k_i e^{-t}\\
C'(t) &= k_i e^{-(1+\lambda_i)t}\\
\text{falls } 1+\lambda_i \neq 0\text{:}\quad C(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i}e^{-(1+\lambda_i)t} + const.\\
x_i(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i}e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t}\\
\text{falls } 1+\lambda_i = 0\text{:}\quad C(t) &= k_i t + const.\\
x_i(t) &= k_i t e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} -2te^{-t} + c_1 e^{-t} \\ 8e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} \\ -4e^{-t} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -2t \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}.
\end{aligned}$$

Mit $y(t) = Tx(t)$ haben wir nun

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} t \\ -2t-8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}.
\end{aligned}$$