ETH Zürich HS 2013 Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas Pierre-François Rodriguez

Mathematatik III - D-HEST

Lösung 7

Aufgabe 1

Es seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $y'(t) = Ay(t)$ das zugehörige DGL-System.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses DGL-systems.

Lösung: die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ mit linear unabhängigen EV v_1, v_2, v_3, und die allgemeine Lösung des Systems hat die Form

$$y(t) = C_1\, e^t\, v_1 + C_2\, e^{it}\, v_2 + C_3\, e^{-it}\, v_3 = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) Für welche Anfangswerte $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsfunktion des AWPs periodisch?

Lösung: die Funktionen $t \mapsto e^{it}\, v_2$ und $t \mapsto e^{-it}\, v_3$ sowie deren Linearkombinationen sind periodisch mit Periode 2π. Die Funktion $t \mapsto e^t\, v_1$ ist nicht periodisch. Damit ist die Lösungsfunktion des AWPs genau dann periodisch, wenn $C_1 = 0$, also für bestimmte Startwerte. Diese Startvektoren $y_0 \in \mathbb{R}^3$ können wir mit Hilfe der Gleichung (1) bestimmen, indem wir $t = 0$ setzen. Es ergibt sich

$$y_0 = \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ (y_0)_2 \\ (y_0)_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \implies (y_0)_3 = C_1 \cdot 1 + 0 + 0.$$

Also $C_1 = 0$ genau dann, wenn $(y_0)_3 = 0$. Damit ist die Lösung für alle Anfangsbedingungen der Form

$$y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

periodisch.

Aufgabe 2

Eine chemische Reaktion zweiter Ordnung beinhaltet die Wechselwirkung (Kollision) von einem Molekül der Substanz P mit einem Molekül der Substanz Q, woraus ein Molekül einer neuen Substanz X hervorgeht. Dies ist durch folgende Schreibweise wiedergegeben: $P + Q \to X$.

Nehmen wir an, dass p und q, die jeweiligen Anfangskonzentrationen von P und Q sind und $x(t)$ die Konzentration von X zur Zeit $t \geq 0$ ist. Dann sind $p - x(t)$ und $q - x(t)$ die jeweiligen Konzentrationen von P und Q zur Zeit t, und die Reaktionsgeschwindingkeit wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))(q - x(t)) \tag{2}$$

gegeben, wobei α eine positive Konstante ist.

a) Es seien $x(0) = 0$ und $p \neq q$. Lösen Sie dieses AWP mit Trennung der Variablen. Bestimmen Sie für die Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ Definitionsbereich und Grenzwert von x für $t \to \infty$,

Lösung: Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \alpha dt.$$

Unter der Annahme $p \neq q$ folgt

$$\frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \frac{1}{q-p}\frac{dx}{p-x} + \frac{1}{p-q}\frac{dx}{q-x} = \alpha dt,$$

und daraus folgt

$$\ln\left(\frac{p-x}{q-x}\right) = \alpha(p-q)t + C,$$

wobei C eine zu findende Konstante ist. Die linke Seite der obigen Gleichung ist wohldefiniert, d.h. $\frac{p-x}{q-x} > 0$, da in der Problemstellung p und q grösser als x sind. Mit Hilfe der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ ist

$$C = \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Durch Auflösen nach x ist die Lösung zum gegebenen Anfangswertproblem

$$x(t) = q\frac{pe^{\alpha(p-q)t} - p}{pe^{\alpha(p-q)t} - q}.$$

Der Definitionsbereich von der Lösung ist die Menge der Punkte, für die gilt:

$$pe^{\alpha(p-q)t} - q \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\ln(q/p)}{\alpha(p-q)}.$$

Falls $p > q$, dann folgt $\ln(q/p) < 0$ und da nach Annahme $t \geq 0$, ist die Lösung in $\{t \geq 0\}$ überall definiert. In diesem Fall gilt zudem

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha(p-q)t} = \infty,$$

woraus folgt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = q.$$

Im Fall $p < q$ ist $\ln(q/p) > 0$ aber $p - q < 0$ somit ist wiederum $x(t)$ für alle $t \geq 0$ wohldefiniert. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha(p-q)t} = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = p.$$

b) Wenn es sich bei P und Q um die gleichen Substanzen handelt, dann ist $p = q$, und Gleichung (2) wird ersetzt durch

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))^2.$$

Lösen sie die unter a) gestellten Aufgaben für diese Situation.

Lösung: Die Differentialgleichung lösen wir wieder mit Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{(p-x)^2} = \alpha dt \Leftrightarrow \frac{1}{p-x} = \alpha t + C.$$

Die Konstante C berechnet sich mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$:

$$C = \frac{1}{p}.$$

Durch Auflösen nach x erhalten wir für die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{p^2 \alpha t}{p \alpha t + 1}.$$

Da p, α beide positiv sind, ist $x(t)$ für $t \geq 0$ wohdefiniert. Eine direkte Berechnung liefert den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = p.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Integrale, welche typische Beispiele in der Theorie der Fourier-Reihen sind.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx$, wobei $n, m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

Lösung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)dx = 0,$$

weil $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist.

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx$ für $n = 1, 2, 3$ und für beliebiges $n \neq 0$.

Lösung:

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(0) - \cos(n\pi)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 2/n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir bzw. $2, 0, \frac{2}{3}$.

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Lösung: mittels partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx &= \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx \\ &= \frac{-\pi\cos(n\pi) - \pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + 0 = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

da $\cos(x)$ eine gerade Funktion ist und $\sin(n\pi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.