Mathematik III - D-HEST

Lösung 8

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe (in reeller Form)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \tag{1}$$

zu den 2π-periodischen Funktionen f mit:

a) $f(x) = |x|$, für $x \in [-\pi, \pi]$,

b) $f(x) = x(2\pi - x)$, für $x \in [0, 2\pi]$,

c) $f(x) = \sin^2(x)$, für $x \in [-\pi, \pi]$.

Hinweis: Für die gesuchten Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \text{ für beliebiges } c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Lösung:

a) Die Funktion f ist gerade, daher sind alle $b_n = 0$. Mit $c = -\pi$ gilt nämlich

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\, dx = 0,$$

weil der Integrand, als Produkt der geraden Funktion $|x|$ mit der ungeraden Funktion $\sin(nx)$, ungerade ist. Mit $c = -\pi$ ergibt sich weiter

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx \overset{\text{Symm.}}{=} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2\, \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx \\ &\overset{\text{Symm.}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \underbrace{\left[\frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi}_{=0} - \int\limits_0^\pi \frac{1}{n} \sin(nx)\ dx \right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int\limits_0^\pi \sin(nx)\ dx = -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \left[\cos(nx) \right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} \left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

(siehe auch Serie 7, Aufgabe 3b). Insgesamt erhält man die Fourier-Reihe

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Mit $n = 2k+1$ können wir dies schreiben als

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x).$$

b) Wiederum ist f gerade, also verschwinden alle Koeffizienten b_n, $n \geq 1$. Mit $c = 0$ erhält man weiterhin

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(2\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2.$$

Im Folgenden verwenden wir wiederholt, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) = 0, \text{ für alle } n \geq 1. \tag{3}$$

Mittels partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(2\pi - x) \cos(nx) dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi n} \Big[x(2\pi - x) \sin(nx) \Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} (2\pi - 2x) \sin(nx) dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi n^2} [x \cos(nx)]_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{2}{\pi n^2} [2\pi - 0] = -\frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$. Somit lautet die gesuchte Fourier-Reihe

$$\frac{2\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

c) Eine trigonometrische Identität ist $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Also $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ und die anderen Koeffizienten verschwinden.

Aufgabe 2

Eine 2π-periodische Funktion wird im Intervall $0 \leq x < 2\pi$ durch die Gleichung $f(x) = e^x$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie ihre Fourier-Reihe in *komplexer* Form.

Hinweis: Die komplexe Darstellung hat die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lösung: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt mit $c = 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-in)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(e^{2\pi} - 1), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $e^{2\pi in} = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ verwendet haben. Also lautet die gesuchte Fourier-Reihe

$$\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}. \tag{5}$$

b) Wie lauten die Koeffizienten ihrer reellen Form?

Lösung: Es gilt

$$a_0 = 2c_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi},$$

und für alle $n \geq 1$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1+in}{1+n^2} + \frac{1-in}{1+n^2}\right] = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\frac{1}{1+n^2}$$

sowie

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1+in}{1+n^2} - \frac{1-in}{1+n^2}\right] = -\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\frac{n}{1+n^2}$$

.

Bemerkung: wir erklären im Folgenden, wie sich die komplexe Darstellung (4) einer Fourier-Reihe aus der reellen herleiten lässt und erläutern die Transformationsregeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \tag{6}$$

die in b) verwendet wurden. Sei also f eine "gutmütige" 2π-periodische Funktion (z.B. sprungstetig, i.e. stetig mit höchstens endlich vielen Sprungstellen, und beschränkt; dies umfasst alle Beispiele in dieser Serie), mit reeller Fourier-Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, wobei a_n und b_n durch (2) gegeben sind. Wir verfolgen das Ziel, diese Reihe in die Form

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, für geeignete Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ zu bringen. Aus der Euler'schen Identität $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ erhält man, dass $\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$ und $\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{-i}{2}(e^{inx} - e^{-inx})$ gilt. Einsetzen in die reelle Fourierentwicklung ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&\qquad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + b_n \frac{-i}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \right) \\
&\qquad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right) \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Wir betrachten die erste Reihe in der vorigen Zeile separat. Mit der Indextransformation $n \mapsto -n$ gilt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{inx}$$

Einsetzen in (7) ergibt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{inx} + \frac{a_0}{2}e^{0nx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx}$$

Dies ist tatsächlich von der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, wenn man

$$\begin{aligned}
c_n &= (a_n - ib_n)/2, \quad &&\text{für alle } n \geq 1 \\
c_0 &= a_0/2 \\
c_n &= (a_{-n} + ib_{-n})/2 \quad &&\text{für alle } n \leq -1
\end{aligned} \tag{8}$$

definiert. Mit dieser Definition erhält man nun aus den Formeln (2) für a_n und b_n entsprechende Formeln für die Koeffizienten c_n. Zum Beispiel gilt für $n \geq 1$, dass

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx - i\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin(nx)\Big)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)(\cos(nx) - i\sin(nx))dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)(\cos(-nx) + i\sin(-nx))dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

was genau der in (4) angegebenen Formel entspricht (hier haben wir in der 2. Zeile die Linearität des Integrals verwendet und in der dritten Zeile , dass cos gerade und sin ungerade ist). Die Fälle $n = 0$ und n negativ sind analog. Des Weiteren kann man (8) auch nach a_n und b_n auflösen. Die dritte Zeile von (8) lässt sich zum Beispiel als $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ für $n \geq 1$ schreiben und Addition mit der ersten Zeile aus (8) ergibt $a_n = c_n + c_{-n}$ für alle $n \geq 1$. Auf ähnliche Weise ergibt sich $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Dies sind genau die Transformationsregeln (6).