ETH Zürich HS 2013 | Koordinator
Prof. Dr. E. W. Farkas | Pierre-François Rodriguez

Mathematik III - D-HEST
Lösung 9

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der (reellen) Fourier-Reihe zur 2π-periodischen Funktion f mit

$$f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

auf zwei verschiedene Arten:

a) durch direktes Ausrechnen mittels

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx, \text{ für } n \geq 0, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx, \text{ für } n \geq 1.$$

Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lösung: es ist $b_n = 0$, da $x \mapsto \cos(x/2)$ gerade ist. Für a_n verwenden wir den Hinweis und berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+\tfrac{1}{2})x) + \cos((n-\tfrac{1}{2})x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\tfrac{1}{2})x) + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\tfrac{1}{2})x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\tfrac{1}{2})\pi) + \frac{2}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\tfrac{1}{2})\pi)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}.
\end{aligned}$$

Also $\boxed{a_n = \dfrac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}}$.

b) durch Berechnung der komplexen Koeffizienten c_n und Bestimmung von a_n, b_n mittels c_n.

Lösung: Version I:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ix/2}+e^{ix/2})e^{-inx}dz \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-i(n+\frac{1}{2})}e^{-ix/2}e^{-inx} + \frac{1}{-i(n-\frac{1}{2})}e^{ix/2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{-i-i}{-i(n+\frac{1}{2})} + \frac{i-(-i)}{-i(n-\frac{1}{2})}\right) \\
&= (-1)^n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}.
\end{aligned}$$

Also $\boxed{c_n = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}}$. Dann berechnet sich a_n mittels folgender Formeln:

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}$$

Da hier $c_n = c_{-n}$ gilt $a_n = 2c_n = \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$.

Version II: $c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot I$, wobei

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx}dx \\
&= \left[2\sin(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2in\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x/2)e^{-inx}dx \\
&= 2((-1)^n + (-1)^n) + \left[-4in\cos(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - 4i^2n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x/2)e^{-inx}dx \\
&= 4(-1)^n + 4n^2 I
\end{aligned}$$

da $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(-\pi/2) = -1$, $\cos(\pm\pi/2) = 0$, $e^{-in\pi} = (-1)^n$ und $i^2 = -1$.

Also $I = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$ und wieder $\boxed{c_n = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}}$.

Aufgabe 2

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer T-periodischen ($T > 0$) Funktion $f(x)$ lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega x}dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz ist. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n der Fourier-Reihe zu den Funktionen:

a) $g(x)$ 2-periodisch mit $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[$.

Lösung: die Fourier-Reihe ist linear, das heisst, $FR(g_1 + g_2) = FR(g_1) + FR(g_2)$. Daher berechnen wir separat für $g_1(x) = 1$ und $g_2(x) = -e^{-x/2}$.

$FR(g_1) = 1e^0$, also $c_0^{(1)} = 1$.

Um die Koeffizienten von $FR(g_2)$ zu bestimmen, berechnen wir

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_0^T g_2(x)e^{-\frac{2i\pi}{T}nx},$$

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^2 (-e^{-x/2})e^{-i\pi nx}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+2i\pi n}e^{-(1+2i\pi n)x/2}\right]_0^2 = \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n},$$

weil $e^{-2i\pi n} = 1$. Mit $c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}$ erhalten wir $\boxed{c_n = \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n} \text{ und } c_0 = e^{-1}}$.

b) $h(x)$ 1-periodisch mit $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0,1[$.

Lösung: analog zu a), $T = 1$, $c_0^{(1)} = 1$ und

$$c_n^{(2)} = \int_0^1 (-e^{-2\pi x})e^{-2i\pi nx}dx = \frac{1}{2\pi(1+in)}\left[e^{-2\pi(1+in)x}\right]_0^1 = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi(1+in)},$$

also $\boxed{c_n = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi(1+in)} \text{ und } c_0 = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi}+1}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + 2y(x) = \sin^2(x). \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung $y(x) : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ von (1) lässt sich auch mittels Fourier-Reihen-Entwicklung berechnen.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y''(x) + 2y(x) = 0$.

Lösung: die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' + 2y = 0$ finden wir mit Hilfe der charakteristischen Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 + 2$. Die Nullstellen sind $\lambda = \pm\sqrt{2}i$, also

$$y_h(x) = C_1 e^{\sqrt{2}ix} + C_2 e^{-\sqrt{2}ix}.$$

b) Die allgemeine Lösung von (1) lautet bekanntlich $y_h + y_p$, wobei y_p eine partikuläre Lösung von (1) ist. Bestimmen Sie ein solches y_p mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Hinweis: Verwenden Sie Serie 8, Aufgabe 1c).

Lösung: um die partikuläre Lösung zu finden, bestimmen wir zunächst die Fourier-Reihe für $\sin^2(x)$. Aus Serie 8, Aufgabe 1c) wissen wir

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

. Den Ansatz $y_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ in (1) einsetzen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2)a_n \cos(nx) + a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Um a_n zu bestimmen, setzen wir den Koeffizienten von $\cos(nx)$ auf beiden Seiten gleich: für $n = 0$ erhalten wir $a_0 = 1/2$ und für $n \geq 1$

$$(2 - n^2)a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 2 \\ 0, & n = 1, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

i.e. $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{4}$ und $a_n = 0$ für $n > 2$. Also hat die allgemeine Lösung die Form

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}ix} + C_2 e^{-\sqrt{2}ix} + \frac{1}{4}\big(1 + \cos(2x)\big).$$