Lösung zur Serie 1

1. Eine direkte Rechnung zeigt

$$u_t(x,t) = \frac{-h'(x-t) + (h(x-t))^2}{(1-th(x-t))^2},$$
$$u_x(x,t) = \frac{h'(x-t)}{(1-th(x-t))^2}.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = u^2(x,t)$$

und

$$u(x,0) = h(x).$$

2. Da

$$u_x(x,t) = \cos(x+t)\mathrm{e}^t,$$
$$u_t(x,t) = \cos(x+t)\mathrm{e}^t + \sin(x+t)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t,$$

rechnet man unmittelbar nach, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Anfangsbedingung erfüllt sind.

3. **a)** Wir betrachten zuerst das homogene Problem $\dot{x}(t) - 2x(t) = 0$. Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda - 2$ und hat als einzige Nullstelle $\lambda = 2$. Somit lautet die allgemeine Lösung des homogenen Problems $x_h(t) = C\mathrm{e}^{2t}$. Mittels Variation der Konstanten finden wir den Ansatz $x_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{2t}$ für die partikuläre Lösung. Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung liefert die Bedingung

$$\dot{C}(t)\mathrm{e}^{2t} + C(t)2\mathrm{e}^{2t} - 2C(t)\mathrm{e}^{2t} = t^2\mathrm{e}^{2t},$$

woraus wir zuerst $\dot{C}(t) = t^2$ und dann $C(t) = \frac{1}{3}t^3 + D$ schliessen. Die gesuchte allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{3}t^3\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{2t} = \frac{1}{3}t^3\mathrm{e}^{2t} + (C+D)\mathrm{e}^{2t}.$$

Bitte wenden!

Aus der gestellten Anfangsbedingung folgt nun, dass $C + D = 1$ sein muss. Die gesuchte Lösung lautet also

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}.$$

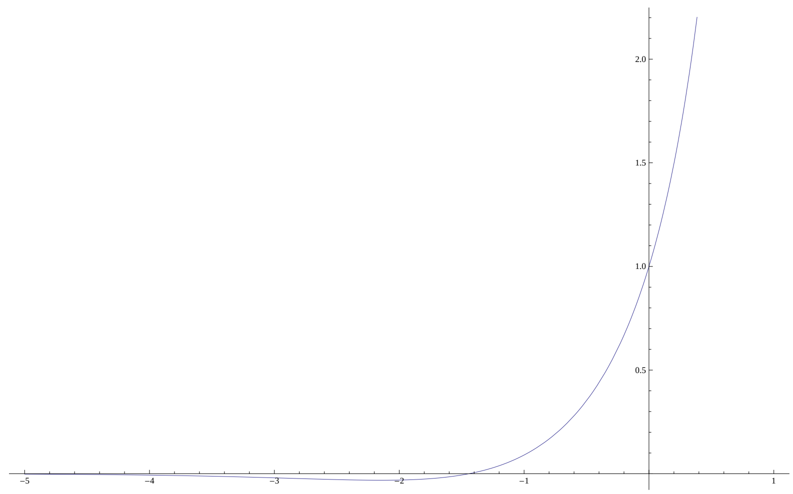

Abbildung 1: Der Graph der gesuchten Funktion aus Aufgabe a).

b) In diesem Fall lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 = \omega,$$

woraus wir auf die folgende allgemeine Lösung schliessen:

- $\omega > 0$: Hier ist die Lösung $x(t) = A\mathrm{e}^{t\sqrt{\omega}} + B\mathrm{e}^{-t\sqrt{\omega}}$.
- $\omega = 0$: In diesem Fall reduziert sich die Gleichung zu

$$\ddot{x}(t) = 0$$

  und die allgemeine Lösung ist $x(t) = Ct + D$.
- $\omega < 0$: Hier ist die Lösung der Realteil von $x(t) = E\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{|\omega|}} + F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{|\omega|}}$ mit $E, F \in \mathbb{C}$ bzw.

$$x(t) = G\cos\left(t\sqrt{|\omega|}\right) + H\sin\left(t\sqrt{|\omega|}\right), \qquad G, H \in \mathbb{R}$$

Soll die Lösung T-periodisch sein, so kommt nur der dritte Fall in Frage. Für die Periode gilt

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{|\omega|}}$$

Siehe nächstes Blatt!

und damit

$$\omega = -\Big(\frac{2\pi}{T}\Big)^2.$$

Die Lösung hat dann die Gestalt:

$$x(t) = G\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + H\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \qquad G, H \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

- Eine Funktion der Periode T hat offensichtlich die Periode nT für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit kann man für gegebenes T auch ω entsprechend wählen.
- Die Differentialgleichung ist linear und homogen. Daher können wir Lösungen superponieren (d.h. Linearkombinationen von Lösungen sind wiederum Lösungen der Gleichung).

4. a) Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = a(x)b(t)$ ergibt $a''b - a'b + a\ddot{b} = 0$ (dabei bezeichnet $'$ die Ableitung nach x und der Punkt die Ableitung nach t) oder äquivalent

$$\frac{a'' - a'}{a} = -\frac{\ddot{b}}{b}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstanten λ:

$$\frac{a'' - a'}{a} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad a'' - a' - \lambda a = 0. \qquad (1)$$

$$-\frac{\ddot{b}}{b} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{b} + \lambda b = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) ist linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $\chi(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - \lambda$ mit den Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda < -\frac{1}{4}$: $\quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}$,

$$a(x) = C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}\right)x}.$$

Bitte wenden!

- $\lambda = -\frac{1}{4}: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, Auch hier suchen wir zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung. Eine Lösung ist klar, nämlich $a(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Um auf die andere Lösung ($a(x) = Cx\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$) zu kommen, betrachten wir die Folgende Perturbation. Wir nehmen an, die Lösung wäre gegeben durch die beiden linear unabhängigen Funktionen $\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)x}$ und $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Dann wäre aber, falls $\varepsilon \neq 0$, auch die folgende Linearkombination $\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]$ eine Lösung. Wir berechnen

  $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^{yx}\bigg|_{y=\frac{1}{2}} = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

  Die Funktion $Cx\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ ist also sicherlich ein Kandidat für die zweite linear unabhänige Lösung und man rechnet nach, dass sie tatächlich die Differentialgleichung löst. Wir finden demnach

  $$a(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

- $\lambda > -\frac{1}{4}: \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \in \mathbb{R}$,

  $$a(x) = C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}.$$

Die Gleichung (2) ist ebenfalls linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $\chi(\alpha) = \alpha^2 + \lambda$ mit den Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda < 0: \quad \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} = \pm i^2\sqrt{|\lambda|} = \mp\sqrt{|\lambda|}$,

  $$b(t) = D_1\mathrm{e}^{t\sqrt{|\lambda|}} + D_2\mathrm{e}^{-t\sqrt{|\lambda|}}.$$

- $\lambda = 0: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$,

  $$b(t) = (D_1 t + D_2)\mathrm{e}^0 = D_1 t + D_2.$$

- $\lambda > 0: \quad \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$,

  $$b(t) = D_1 \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right).$$

Die Lösungen der Form $u(x,t) = a(x)b(t)$ für die gegebene Differentialgleichung lauten somit:

Siehe nächstes Blatt!

- $\lambda < -\frac{1}{4}$:
$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{|\lambda|-\frac{1}{4}}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-i\sqrt{|\lambda|-\frac{1}{4}}\right)x}\right)\left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$
- $\lambda = -\frac{1}{4}$
$$u(x,t) = \left((C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right)\left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$
- $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$:
$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}\right)\left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$
- $\lambda = 0$:
$$u(x,t) = (C_1 \mathrm{e}^x + C_2)(D_1 t + D_2).$$
- $\lambda > 0$:
$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}\right)\left(D_1 \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right).$$

b) Wiederum setzen wir den vorgeschlagenen Ansatz in die gegebene Gleichung ein und erhalten $v'' - v' + \ddot{w} = 0$ oder äquivalent

$$v'' - v' = -\ddot{w}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$v'' - v' = \lambda \qquad (3)$$
$$-\ddot{w} = \lambda \qquad (4)$$

Gleichung (3) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homogene Gleichung

$$v'' - v' = 0$$

hat das charakteristische Polynom $\chi(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ mit den Nullstellen $\alpha_{1,2} = \frac{1\pm1}{2}$, d. h.

$$v_h(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^0 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2.$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $v_p = ax+b$. Einsetzen ergibt $-a = \lambda$. Damit folgt

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 - \lambda x + b = C_1 \mathrm{e}^x - \lambda x + E.$$

Gleichung (4) löst man, indem man zweimal integriert:

$$\ddot{w} = -\lambda \Rightarrow \dot{w} = -\lambda t + D_1 \Rightarrow w = -\frac{\lambda}{2}t^2 + D_1 t + D_2.$$

Die Lösungen der Form $u(x,t) = v(x) + w(t)$ für die gegebene Gleichung lauten somit

$$u(x,t) = C_1 \mathrm{e}^x - \lambda x - \frac{\lambda}{2}t^2 + D_1 t + F.$$

Bemerkung: Offenbar erhält man mit dem Summenansatz eine viel kleinere Familie von Lösungen als mit dem Produktansatz. Die Gesamtheit aller Lösungen der gegebenen Gleichung ist viel umfangreicher als die Menge der hier berechneten Lösungen und ergibt sich als Überlagerung der oben berechneten Lösungen für verschiedene λ.

5. Wir setzen den gegebenen Produktansatz in die Gleichung ein und erhalten $U''T + U\ddot{T} = 0$ oder äquivalent

$$\frac{U''}{U} = -\frac{\ddot{T}}{T}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$\frac{U''}{U} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad U'' - \lambda U = 0. \qquad (1)$$

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{T} + \lambda T = 0. \qquad (2)$$

Wie oben erhalten wir

- $\lambda < 0:$

$$u(x,t) = \left(C_1 \cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)\right)\left(D_1 \mathrm{e}^{t\sqrt{|\lambda|}} + D_2 \mathrm{e}^{-t\sqrt{|\lambda|}}\right).$$

- $\lambda = 0:$

$$u(x,t) = (C_1 x + C_2)(D_1 t + D_2).$$

- $\lambda > 0:$

$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{\lambda}}\right)\left(D_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2 \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right).$$

Auch hier würde eine Überlagerung zur allgemeinen Lösung führen.