Lösung zur Serie 2

1. a) Die Fourierreihe einer Funktion f, die auf $[0,T]$ definiert ist, erhält man wiefolgt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t),$$

wobei

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}t,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Fourier-Reihe für f_1 (hier ist $T = 2\pi$):

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_0^{2\pi} = 0 \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) - \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k} - \left[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_0^{2\pi}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{2}{k}
\end{aligned}$$

Dass alle a_k verschwinden liegt daran, dass die periodische Fortsetzung der Funktion ungerade ist. Daher gilt: $f_1(x) = x - \pi$ für $x \in [0, 2\pi]$ hat die Fourierreihe

$$\mathcal{F}_1(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx).$$

b) Fourierreihe für f_2: Hier ist wieder $T = 2\pi$. Diese Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_{-\pi}^{\pi} = -\pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-\pi)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) - \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-\pi)\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{-\pi}{k}\cos(-k\pi) - \left[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \\
&= (-1)^k\left(-\frac{2}{k}\right)
\end{aligned}$$

Daher gilt: $f_2(x) = x - \pi$ hat die Fourierreihe

$$\mathcal{F}_2(x) = -\pi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k}\sin(kx)$$

auf $[-\pi, \pi]$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Man sieht, die Periode hier ist $T = 1$, damit ist $\omega = 2\pi$. Wählen wir also die Fourierreihe zum Beispiel auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 0 \\
a_k &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_2(x)\cos(2k\pi x)\mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \cos(2k\pi x)\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \cos(2k\pi x)\mathrm{d}x = 0 \\
&= -\frac{1}{k\pi}[\sin(2k\pi x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{k\pi}[\sin(2k\pi x)]_{0}^{\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned}
$$

Man hätte auch so argumentieren können: Die Funktion ist ungerade und damit auch ihr Produkt mit dem geraden Cosinus. Für ungerade Funktionen verschwindet ein Integral über einen um 0 symmetrisches Intervall.

$$
\begin{aligned}
b_k &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3(x)\sin(2k\pi x)\mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sin(2k\pi x)\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(2k\pi x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k\pi}[\cos(2k\pi x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{k\pi}[\cos(2k\pi x)]_{0}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(\cos(0) - \cos(-k\pi)\right) - \frac{1}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - \cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(2 - 2\cos(k\pi)\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für ungerade } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für gerade } k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Man erhält also für die Impulsfunktion die Fourierreihe

$$
\mathcal{F}_3(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{2k-1}.
$$

2. Wir beobachten, dass die periodische Fortsetzung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion $f(x) := (x-\pi)^2$ gerade ist. Damit verschwinden alle Sinusterme in der Fourierreihe. Für Koeffizienten

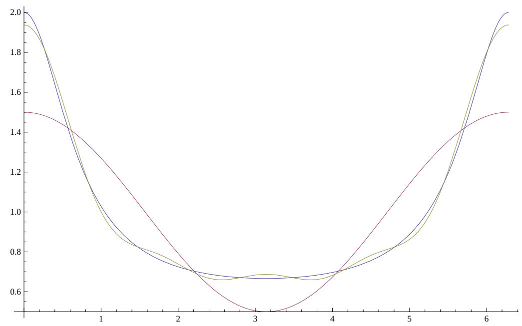

Abbildung 1: Die Funktion f_3 und zwei Approximationen mittels Fourierpolynomen.

a_k der Cosinusterme rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(kx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[(x-\pi)^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}2(x-\pi)\frac{\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[2(x-\pi)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{2\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kx)}{k^2}\mathrm{d}x}_{=0}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k^2}-\frac{(-2\pi)}{k^2}\right) = \frac{4}{k^2}\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f ist also gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos(kx).$$

Man kann zeigen, dass in diesem konkreten Fall die Fourierreihe dieser Funktion gleichmässig gegen die Funktion f konvergiert (das ist nicht trivial! – siehe z.B. A. Zygmund, Trigonometric Series). Damit ergibt sich an der Stelle null

$$\pi^2 = f(0) = \mathcal{F}(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$$

Siehe nächstes Blatt!

und daraus folgt die erstaunliche und “hübsche” Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

die Euler bereits 1748 entdeckt hat.

3. Unter Verwendung von

$$\mathrm{e}^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx) \text{ und } \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right) = \cos(kx)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) \\
&\overset{(\star)}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}\right)^k\right) \\
&\overset{(\star\star)}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-\mathrm{e}^{ix}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2(2-\mathrm{e}^{-ix})}{(2-\mathrm{e}^{ix})(2-\mathrm{e}^{-ix})}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{4-2\mathrm{e}^{-ix}}{5-2(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{4-2\mathrm{e}^{-ix}}{5-4\cos x}\right) \\
&= \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Zu $(\star)$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \operatorname{Re}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir bei (1) resp. (2) die Linearität resp. die Stetigkeit der Funktion $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ verwenden.
Zu $(\star\star)$: Wegen $\left|\mathrm{e}^{ix}\right| = 1$, gilt $\frac{\left|\mathrm{e}^{ix}\right|}{2} < 1$ und damit ist die geometrische Reihe konvergent.

4. Beachte, dass die Sinus- und Cosinusfunktionen punktsymmetrisch sind in ihren Nullstellen und achsensymmetrisch in ihren Extrema.

a) Da nur Cosinusterme auftreten, ist f gerade. Falls n gerade ist, so gilt $n = 2k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sin(2kx) = 0 \iff x = \frac{\ell\pi}{2k}, \ell \in \mathbb{Z},$$

ist $\frac{\pi}{2}$ ein Extremum von $\cos(nx)$ $(\ell := k)$. Daraus folgt zusätzlich $f(x) = f(\pi - x)$ (Achsensymmetrie um $x = \frac{\pi}{2}$).

b) Falls n ungerade ist, so ist $\frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle von $\cos(nx)$. Daraus folgt $f(x) = -f(\pi - x)$ (Punktsymmetrie um $x = \frac{\pi}{2}$) und f ist gerade.

c) Da nur Sinusterme auftreten, ist f ungerade. Aus a) wissen wir, dass $\pi/2$ eine Nullstelle ist von $\sin(nx)$. Daraus erhalten wir die Symmetrie $f(x) = -f(\pi - x)$.

d) Analog zu b) ist $\pi/2$ ein Extremum von $\sin(nx)$, falls n ungerade ist. Damit erhalten wir die Symmetrie $f(x) = f(\pi - x)$.