Lösung zur Serie 3

1. Wir machen einen Separationsansatz, also $u(x,t) = X(x)T(t)$. Dann ist $u_x(x,t) = X'(x)T(t)$ und $u_t(x,t) = X(x)\dot{T}(t)$ Einsetzten in die Gleichung liefert $xX'T + X\dot{T} = tXT$ respektive

$$\frac{xX'}{X} = t - \frac{\dot{T}}{T}.$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Damit obige Gleichung also für alle Paare (x,t) erfüllt ist, müssen die beiden Seiten konstant sein. Man erhält daher

$$\frac{xX'}{X} = t - \frac{\dot{T}}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nun löst man beide Gleichungen separat. Die erste Gleichung ist ausserhalb von null äquivalent zu $\frac{X'}{X} = \frac{\lambda}{x}$. Integration nach x liefert $\ln X(x) = \lambda \ln |x| + C$ und daraus folgt $X(x) = \widetilde{C}\, |x|^{\lambda}$. Die Gleichung in t lösen wir analog, indem wir nach t integrieren:

$$\begin{aligned} t - \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= \lambda \\ \int \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \mathrm{d}t &= \int (t-\lambda) \mathrm{d}t \\ \ln T(t) &= \frac{t^2}{2} - \lambda t + D \\ T(t) &= \widetilde{D}\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2} - \lambda t}. \end{aligned}$$

Man erhält daher

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \widetilde{C}\, |x|^{\lambda}\, \widetilde{D}\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2} - \lambda t} = E\, |x|^{\lambda}\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2} - \lambda t}$$

Da $u(x,0) = x^2$ folgt sofort, dass $E = 1$ und $\lambda = 2$ sein muss, daher erhält man

$$u(x,t) = x^2 \exp\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right).$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, erfüllt die gegebene Differentialgleichung und die geforderten Anfangsdaten.

Bitte wenden!

2. Wieder machen wir einen Separattionsansatz, also $u(x,t) = X(x)T(t)$. Die Differentialgleichung wird dann zu $X''T + X\ddot{T} = 0$. Nach dem Trennen der Variablen erhält man $\frac{X''}{X} = -\frac{\ddot{T}}{T}$ und da dies für jedes Paar (x,t) gelten muss, folgt

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda,$$

wobei λ eine reelle Zahl ist. Zur ersten Gleichung $\frac{X''}{X} = \lambda$ bzw. $X'' - \lambda X = 0$: Das zugehörige charakteristische Polynom ist $P(\mu) = \mu^2 - \lambda$. Dieses hat die Nullstellen $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$. Daher ist

$$X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Zur zweiten Gleichung $-\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda$ bzw. $\ddot{T} + \lambda T = 0$: Hier ist das zugehörige charakteristische Polynom $\widetilde{P}(\mu) = \mu^2 + \lambda$. Dieses hat die Nullstellen $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$. Daher ist

$$T(t) = C_3 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}t} + C_4 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}t}.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

$\lambda > 0:$ In diesem Fall liefert die Multiplikation der Gleichung in t und jener in x

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + B\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + C\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + D\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t}\right) + \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\left(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}\left(E\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) + F\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\left(G\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) + H\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right) \end{aligned}$$

Man verwendet die Euler'sche Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, um die Gleichung

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} = E\cos\sqrt{\lambda}t + F\sin\sqrt{\lambda}t$$

zu erhalten (mit der Wahl geeigneter Konstanten natürlich).

$\lambda = 0:$ Dann ist $\frac{X''}{X} = 0$, woraus $X'' = 0$ folgt. Zweimalige Integration liefert $X(x) = Ax + B$. Analog erhält man $T(t) = Ct + D$. Damit ist in diesem Falle

$$u(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$$

$\lambda < 0:$ In diesem Fall gilt $\sqrt{\lambda} = \mathrm{i}\sqrt{|\lambda|}$. Wir setzen $\mu = -\lambda$ und erhalten analog zum ersten Fall

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\sqrt{\mu}t}\left(I\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + J\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)\right) + \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t}\left(K\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + L\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

Eine Anfangsbedingung ist $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. Im Fall $\lambda > 0$ ist u periodisch in t. Daher kommt nur die triviale Lösung $u = 0$ in Frage. Für $\lambda = 0$ kann die Bedingung nur erfüllt werden, falls $C = 0$, da $|Ct| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, falls $C \neq 0$. Dann ist $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} (Ax + B)\, D$. Dieser Ausdruck soll nun für alle x verschwinden daraus folgt erneut, dass $u = 0$. Falls nun $\lambda < 0$, ist $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{\mu}t} = \infty$ also muss auch $I = J = 0$ sein. Andererseits ist $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t} = 0$. Weil der Ausdruck $K\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + L\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)$ beschränkt ist, folgt insbesondere, dass

$$\lim_{t\to\infty} \left(K\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + L\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t} = 0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (1) mit der Anfangsbedingung (2) haben also die Gestalt

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t}\left(K\cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + L\sin\left(\sqrt{\mu}x\right)\right).$$

Jetzt zu Bedingung (4). Es gilt $\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ist

$$u(0,t) = K\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t} = 0$$

und damit folgt $K = 0$. Die Bedingung (4) wird zu $u(2\pi,t) = L\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}t}\sin\left(2\sqrt{\mu}\pi\right) = 0$ oder äquivalent dazu

$$\sin\left(2\sqrt{\mu}\pi\right) = 0 \iff \sqrt{\mu} = \frac{\ell}{2},\ \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wir beachten, dass die Differentialgleichung (1) linear ist. Daher sind Linearkombinationen von Lösungen erneut Lösungen. Wir schreiben also formal (d.h. ohne Beachtung von Konvergenz) die folgende allgemeine Lösung hin:

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell \sin\left(\frac{\ell}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\ell}{2}t\right)$$

Die letzte Bedingung (3) ist, dass

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } -\pi \leq x < \pi, \\ f(x+2\pi) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Um einen Koeffizientenvergleich machen zu können, müssen wir die Funktion f als Fourier-

Bitte wenden!

reihe darstellen. f ist ungerade, daher gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$. Berechnen wir also b_k:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x^3}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{3x^2}{k}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x^3}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{3x^2}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{6x}{k^2}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x^3}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{3x^2}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{6x}{k^3}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{6}{k^3}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x^3}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{3x^2}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{6x}{k^3}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{6}{k^4}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{k}\cos(k\pi) - \left(-\frac{(-\pi)^3}{k}\cos(-k\pi)\right) + \frac{3\pi^2}{k^2}\sin(k\pi) - \left(\frac{3(-\pi)^2}{k^2}\sin(-k\pi)\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{6\pi}{k^3}\cos(k\pi) - \left(\frac{6(-\pi)}{k^3}\cos(-k\pi)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-2\frac{\pi^3}{k}\cos(k\pi) + \frac{6\pi}{k^3}\cos(k\pi) + \frac{6\pi}{k^3}\cos(k\pi)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{k} + \frac{6\pi}{k^3}\right)\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \\
&= 2\left(-\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)(-1)^k
\end{aligned}
$$

Somit können wir f durch ihre Fourierreihe darstellen:

$$
f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k\left(-\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)\sin(kx)\right)
$$

Andererseits gilt für die allgemeine Lösung

$$
u(x,0) = \sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell \sin\left(\frac{\ell}{2}x\right).
$$

Wir beobachten, dass in der Fourierreihe von f nur ganzzahlige Frequenzen vorkommen, während die allgemeine Lösung auch halbzahlige zulässt. Wir betrachten also nur die Summe der ganzzahligen Frequenzen unserer Lösung (setze also $\ell = 2k$ und summiere bloss noch über k) und erhalten

$$
u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k \sin(kx)
$$

Der Koeffizientenvergleich mit der Fourierreihe von f liefert also

$$
L_k = b_k = 2\left(-\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)(-1)^k
$$

Siehe nächstes Blatt!

und daher ist eine formale Lösung des Problems gegeben durch die folgende Reihe (und man kann zeigen, dass diese Reihe gleichmässig konvergiert):

$$u(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(-\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)\sin(kx)\exp(-kt)$$

3. **a)** Wir verwenden den Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ und erhalten

$$X(x)\dot{T}(t) - X''(x)T(t) = 0,$$

wobei der Punkt die Ableitung nach t, der Strich jene nach x bezeichnet. Division durch XT liefert

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Die linke Seite hängt nur von t, die rechte nur von x ab. Daher sind beide Seiten gleich einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir finden also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und betrachten zunächst jene in x:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Falls $\lambda < 0$, lautet die allgemeine Lösung

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \text{ wobei } \omega = \sqrt{-\lambda}.$$

Die Randbedingungen implizieren $T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0$, also $X(0) = X(\pi) = 0$ und daher

$$A = 0, \quad \omega \in \mathbb{N}.$$

Dies wiederum impliziert, dass

$$\lambda = -n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Falls $\lambda \geq 0$, ist die Lösung gegeben durch eine Linearkombination von Exponentialfunktionen oder eine affine Funktion. In jedem dieser Fälle kann nur die triviale Lösung die Randbedingung erfüllen. Wir betrachten also nur den periodischen Fall $\lambda < 0$. Die Gleichung

$$\dot{T}(t) = \lambda T(t)$$

hat die allgemeine Lösung

$$T(t) = Ce^{\lambda t},$$

Bitte wenden!

das heisst für alle $n \in \mathbb{N}$ finden wir die Lösung

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Da die ursprüngliche Differentialgleichung linear ist, löst jede Linearkombination von Lösungen die Gleichung erneut. Formal ist also auch die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx)$$

eine Lösung unserer Gleichung. Wir wollen nun die Konstanten C_n so wählen, dass die Initialbedingung erfüllt wird. Dies führt zur folgenden Bedingung:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \sin x - 3\sin(2x) + 2\sin(3x)$$

und damit zu $C_1 = 1$, $C_2 = -3$, $C_3 = 2$ und $C_n = 0$ für alle übrigen n. Die Lösung der Aufgabe lautet somit

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} \sin x - 3\mathrm{e}^{-4t} \sin(2x) + 2\mathrm{e}^{-9t} \sin(3x).$$

b) Im Vergleich zum Teil a) der Aufgabe muss die Funktion u auf dem Rand von $[0,\pi]$ nicht verschwinden. Wenn wir also eine Funktion u_p finden, die die Gleichung

$$u_t - u_{xx} = 0$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = 1, u(\pi,t) = 1 + \pi$ löst, können wir die Gleichung

$$\widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{xx} = 0$$

mit den Rand- und Initialbedingungen

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(0,t) &= 0 \\ \widetilde{u}(\pi,t) &= 0 \\ \widetilde{u}(x,0) &= \pi x - x^2 \end{aligned}$$

lösen und finden dann die Lösung der ursprünglichen Gleichung mittels Superposition, d.h.

$$u(x,t) = u_p(x,t) + \widetilde{u}(x,t)$$

Wir können eine Funktion u_p finden, welche von t unabhänging ist. $u_p''(x) = 0$, $u_p(0) = 1$ und $u_p(\pi) = 1 + \pi$ impliziert, dass u_p eine affine Funktion ist, welche die Punkte $(0,1)$

Siehe nächstes Blatt!

and $(\pi, 1+\pi)$ verbindet, d.h. $u_p(x) = 1 + x$.

Für $\widetilde{u}(x,t)$ verwenden wir die letzte Aufgabe und finden

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Um die C_n zu bestimmen, müssen wir die Initialbedingung in eine Fourierreihe entwickeln:

$$\pi x - x^2 = \widetilde{u}(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)$$

Es folgt mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) \sin(nx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x^2 \sin(nx) \mathrm{d}x + 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{((nx)^2 - 2)\cos(nx)}{n^3} - \frac{2x\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} + 2 \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^3}(2 + (-1)^n (n^2\pi^2 - 2)) - 2\frac{(-1)^n \pi}{n} \\
&= (-1)^n \frac{2}{\pi n^3} \left(2(-1)^n - 2\right) \\
&= \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Lösung unserer ursprünglichen Gleichung ist also gegeben durch

$$u(x,t) = 1 + x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t} \sin((2k+1)x) \,.$$

4. Wir verwenden den Separationsansatz $u(x,t) := X(x)T(t)$. Es folgt

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = k \in \mathbb{R}$$

und die Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ implizieren $X'(0) = X'(1) = 0$. Die gewöhnliche Differentialgleichung $X'' - kX = 0$ hat folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}
k = 0: \quad & X(x) = C_1 + C_2 x \\
& X'(x) = C_2 \\
k < 0: \quad & X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-k}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-k}x\right) \\
& X'(x) = \sqrt{-k}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{-k}x\right) - C_1 \sin\left(\sqrt{-k}x\right)\right) \\
k > 0: \quad & X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}x} \\
& X'(x) = \sqrt{k}\left(C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}x} - C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}x}\right).
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen finden wir im Fall $k = 0$ nur die konstante Lösung $X = C_1$ und für $k > 0$ folgt einerseits $C_1 = C_2$ und andererseits $C_1 e^{\sqrt{k}} = C_2 e^{-\sqrt{k}}$, was nur die triviale Lösung $X \equiv 0$ zulässt. Im Fall $k < 0$ folgt $C_2 = 0$ aus $X'(0) = 0$ und $X'(1) = 0$ impliziert $C_1 \sin\left(\sqrt{-k}\right) = 0$. Nichttriviale Lösungen finden wir also nur, falls $k = -n^2\pi^2$. Dies führt zur allgemeinen Lösung

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t)\right) \cos(\pi n x).$$

Unter Verwendung des Hinweises finden wir

$$u(x,0) = 2\sin^2(2\pi x) = 1 - \cos(4\pi x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\pi n x)$$

und dies führt zu $A_0 = 1, A_4 = -1$ und $A_n = 0$ für alle übrigen n. Die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ impliziert

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\pi n x) = 0 \iff B_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir finden als Lösung

$$u(x,t) = 1 - \cos(4\pi t)\cos(4\pi x).$$

5. Nach den Euler'schen Formeln gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. Also:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\right) \\
&= c_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kt)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\right) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos(-kx) + \mathrm{i}\sin(-kx)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\right) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos(kx) - \mathrm{i}\sin(kx)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\right) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k})\cos(kx) + \mathrm{i}(c_k - c_{-k})\sin(kx)
\end{aligned}$$

Nun setzt man $\frac{a_0}{2} = c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}\left(c_k - c_{-k}\right)$ und erhält so die reelle Version.

Man kann aus obiger Euler'schen Formel auch $\sin x$ bzw. $\cos x$ berechnen. Man erhält dann:

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \text{ bzw. } \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

Nun ist $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$, daher $c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\mathrm{d}t$.
Daher:

$$\begin{aligned}
a_k = c_k + c_{-k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)2\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
b_k = \mathrm{i}\left(c_k - c_{-k}\right) &= \mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(-2\mathrm{i}^2\right)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Bemerkung: In der Aufgabenstellung war ein (nun korrigierter) Fehler: Die Integrationsgrenzen beim c_k-Koeffizienten waren falsch. Natürlich sollte nicht über ganz $\mathbb{R}$, sondern nur über eine Periode integriert werden.