Dr. A. Cannas

Lösung zur Serie 4

1. Die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ ist gerade. Es gilt also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^n \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{0}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Für das zweite Integral verwenden wir partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{\ln t}{t^3}\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{2t^2}\ln t\right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{2t^3}\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^2}\ln n + 0 + \left[\frac{1}{2\,(-2t^2)}\right]_1^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(0+\frac{1}{-4n^2}-\frac{1}{-4}\right) \\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

denn

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^2}\ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\frac{1}{n}}{4n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4n^2}\right) = 0$$

nach dem Satz von de l'Hospital (Mathematik I).

Das dritte Integral ist schwierig zu berechnen, man kann aber trotzdem sehen, dass es existiert. Wieder wenden wir partielle Integration an:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\left(-\left[\frac{\cos t}{t}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{n}\frac{-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{n}\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{n}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} < \infty.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. Die Fouriertransformierte $\hat{f}(\lambda)$ einer Funktion ist definiert durch

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$$

Daher gilt für $f(x) := \mathrm{e}^{-|x|}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\lambda)x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{1-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\lambda)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-(1+\mathrm{i}\lambda)}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}\right]_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(0 - \left(-\frac{1}{1-\mathrm{i}\lambda}\right) - \left(0 - \frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

Für die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \pi - |x| & -\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (\pi + x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\pi + x}{-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x + \left[\frac{\pi - x}{-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{\pi}{\mathrm{i}\lambda} - 0 - \left[\frac{1}{(\mathrm{i}\lambda)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]_{-\pi}^{0}\right) + \left(0 + \frac{\pi}{\mathrm{i}\lambda} + \left[\frac{1}{(\mathrm{i}\lambda)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]_{0}^{\pi}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\mathrm{i}\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} - \frac{\pi}{\mathrm{i}\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\lambda^2}\left(2 - \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\lambda^2}\left(2 - 2\cos(\lambda\pi)\right) \\
&= \frac{1}{\pi\lambda^2}\left(1 - \cos(\lambda\pi)\right)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Homogener Teil: $u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$. Wir setzen $u(x,t) = X(x)T(t)$: Dann erhält man $X(x)\ddot{T}(t) = c^2 X''(x)T(t)$ und somit

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T}(t) = k$$

Wir unterscheiden die Fälle $k = 0, k > 0$ und $k < 0$. Die Gleichung

$$\frac{X''}{X} = k$$

hat das charakteristische Polynom $P(\mu) = \mu^2 - k = 0$ und daher die allgemeine Lösung

$$X(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\sqrt{k}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{k}x}, & \text{falls } k > 0 \\ C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{|k|}x} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{|k|}x}, & \text{falls } k < 0 \\ Ex + F, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Analog findet man für die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = k$$

die allgemeine Lösung

$$T(t) = \begin{cases} \widetilde{A}\mathrm{e}^{c\sqrt{k}t} + \widetilde{B}\mathrm{e}^{-c\sqrt{k}t}, & \text{falls } k > 0 \\ \widetilde{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\sqrt{|k|}t} + \widetilde{D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\sqrt{|k|}t}, & \text{falls } k < 0 \\ \widetilde{E}t + \widetilde{F}, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

Da wir nach einer bescheränkten Funktion u suchen, können wir den Fall $k > 0$ ausschliessen. Ebenso ist der Fall $k = 0$ uninteressant, weil dort die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ zu Löungen der Form $Gx + H$ führt, die nicht die gewünschte Inhomogenität realisieren können.

Betrachten wir also den Fall $k < 0$ und setzen $\lambda := \sqrt{|k|}$. Wir erhalten also

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \left(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right)\left(\widetilde{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\lambda t} + \widetilde{D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\lambda t}\right).$$

Ausmultiplizieren liefert die folgende allgemeine Lösung

$$u(x,t) := C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} + D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)},$$

Beachte, dass Ausmultiplizieren im Prinzip 4 Terme erzeugt. Die zwei fehlenden Terme sind aber in der oben angegebenen Lösung enthalten, wenn man für λ auch wieder negative Werte zulässt. Da die Gleichung linear ist, liefern Summen, resp. Riemannsche

Bitte wenden!

Summen und auch Integrale von Lösungen wiederum Lösungen der Gleichung. Unsere allgemeinste Lösung lautet also

$$u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} + D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \right) \mathrm{d}\lambda$$

b) Inhomogener Teil: $u(x,0) = g(x) = \begin{cases} \pi - |x| & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$u_t(x,0) = 0$

Zunächst die Bedingung $u_t(x,0) = 0$:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} + D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \right) \mathrm{d}\lambda \\ &\overset{\star}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} + D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \right) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{i}\lambda c C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} - \mathrm{i}\lambda c D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \right) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{i}\lambda c C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} - \mathrm{i}\lambda c D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \right) \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\star$ gilt, weil die Ableitung des Integranden nach t existiert und stetig ist.

Damit wird $u_t(x,0) = 0$ zu

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{i}\lambda c C(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} - \mathrm{i}\lambda c D(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \right) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\lambda c \left(C(\lambda) - D(\lambda) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda = 0 \end{aligned}$$

und $u(x,0) = g(x)$ zu

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C(\lambda) + D(\lambda) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda = g(x).$$

Die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ liefert $C(\lambda) = D(\lambda)$. In Aufgabe 2 dieser Serie haben wir gesehen, dass die Fouriertransformierte von g folgende Gestalt hat:

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\pi\lambda^2} \left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right) \right).$$

Wir können demnach g als Rücktransformierte von $\hat{g}$ betrachten und schreiben

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda^2} \left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda.$$

Siehe nächstes Blatt!

Daraus kann man schliessen, dass $C(\lambda) + D(\lambda) = 2C(\lambda) = \frac{1}{\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right)$ und damit

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right)$$

Die Lösung des gegebenen Problems ist daher:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)} + \frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)} \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda ct} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda ct}\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} 2\cos\left(\lambda ct\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\lambda\pi\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \cos\left(\lambda ct\right) \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

4. **a)** Wegen der Linearität der Fourier-Transformation und $\widehat{u_{xx}} = -\lambda^2 \hat{u}$, folgt:

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{tt} - u_{xx}} &= \hat{0} \\
\hat{u}_{tt} + \lambda^2 \hat{u} &= 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine gewöhnliche Differentialgleichung in t deren Lösung gegeben ist durch

$$\hat{u}(\lambda, t) := a_\lambda \cos(\lambda t) + b_\lambda \sin(\lambda t).$$

Die Fourier-Transformation der Initialbedingungen liefert einerseits $\hat{u}_t(\lambda, 0) = 0 = \lambda b_\lambda$ und andererseits (Hinweis)

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) = a_\lambda.$$

Wir finden

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) \cos(\lambda t)$$

und um u zu finden, müssen nun die Rück-Transformation von $\hat{u}$ (in λ) ausrechen: Es

Bitte wenden!

folgt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\cos(\lambda t)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda t}+\mathrm{e}^{-i\lambda t})\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda(x+t)}+\mathrm{e}^{i\lambda(x-t)})\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+t)-f(x-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\exp\left(-(x+t)^2\right)+\exp\left(-(x-t)^2\right)\right).
\end{aligned}$$

b) Wir gehen analog vor und erhalten

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{tt}+u_{xxxx}} &= \hat{0} \\
\hat{u}_{tt}+\lambda^4\hat{u} &= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\hat{u}(\lambda,t)=c_\lambda\mathrm{e}^{i\lambda^2 t}+d_\lambda\mathrm{e}^{-i\lambda^2 t}$. Verwendung der transformierten Initialbedingungen impliziert

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) &= c_\lambda + d\lambda \\
0 &= i\lambda^2(c_\lambda - d_\lambda).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$c_\lambda = d_\lambda = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

und damit

$$\hat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)\left(\mathrm{e}^{i\lambda^2 t}+\mathrm{e}^{-i\lambda^2 t}\right)$$

Wie bei Teil a) müssen wir nun rücktransformieren:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)\left(\mathrm{e}^{i\lambda^2 t}+\mathrm{e}^{-i\lambda^2 t}\right)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}(1-4it)\right)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}(1+4it)\right)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{f\left(\frac{x}{\sqrt{1-4it}}\right)}{\sqrt{1-4it}}+\frac{f\left(\frac{x}{\sqrt{1+4it}}\right)}{\sqrt{1+4it}}\right).
\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Funktion die gewünschte Differentialgleichung sowie die Randbedingungen erfüllt.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Wir machen einen Produktansatz, also $u(x,t) = X(x)T(t)$. Analog zur Lösung von Aufgabe 5 aus Serie 3 finden wir

$$\frac{X''}{X} = c^2 \frac{\ddot{T}}{T} = k \in \mathbb{R},$$

wobei aufgrund der Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ nur der Fall $k < 0$ interessant ist. Für diesen Fall finden wir $X(x) = C_1 \cos(x\sqrt{-k}) + C_2 \sin(x\sqrt{-k})$. Die Bedingung $u(0,t) = 0$ impliziert $C_1 = 0$. Die Bedingung $u(L,t) = 0$ führt zu $C_2 \sin(L\sqrt{-k}) = 0$ und damit zu $k = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Analog löst man die Gleichung in t. Die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ führt zur Lösung $T(t) = \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$ und eine allfällig auftretende Konstante können wir in der Konstanten der Funktion X absorbieren. Als allgemeine Lösung erhalten wir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right).$$

Um die Bedingung $u(x,0) = \frac{L}{2} - \left|x - \frac{L}{2}\right| =: f(x)$ zu erfüllen, entwickeln wir die Funktion f in eine Fourierreihe. Wir setzen f ungerade und $2L$-periodisch fort und berechnen die Koeffizienten b_k: Es gilt

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}} x \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}} (L-x) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{Lk^2\pi^2}\left[-Lk\pi x \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + L^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&+ \frac{1}{Lk^2\pi^2}\left[-L^2 k\pi \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + Lxk\pi \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) - L^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}} \\
&= -\frac{L}{k^2\pi^2}\left(k\pi \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \\
&+ \frac{L}{k^2\pi^2}(-1)^k \left(k\pi \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \equiv 0 \mod 4 \\ \frac{4L}{k^2\pi^2} & \text{falls } k \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & \text{falls } k \equiv 2 \mod 4 \\ \frac{-4L}{k^2\pi^2} & \text{falls } k \equiv 3 \mod 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung finden wir nach dem Koeffizientenvergleich

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4L}{(2n-1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{L}t\right).$$

b) Einsetzen in d'Alemberts Formel ergibt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right),$$

wobei f wieder die ungerade $2L$-periodische Fortsetzung aus Teil a) bezeichnet. Man kann leicht nachrechnen, dass die Randbedingungen erfüllt sind.