Lösung zur Serie 5

1. **a)** Es gilt $\partial_r c_k = kr^{k-1}\cos(k\varphi)$, $\partial_r s_k = kr^{k-1}\sin(k\varphi)$, $\partial_{rr} c_k = k(k-1)r^{k-2}\cos(k\varphi)$, $\partial_{rr} s_k = k(k-1)r^{k-2}\sin(k\varphi)$, $\partial_{\varphi\varphi} c_k = -k^2 r^k \cos(k\varphi)$ und $\partial_{\varphi\varphi} s_k = -k^2 r^k \sin(k\varphi)$. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

b) In Polarkoordinaten hängt die Funktion u_0 nur von φ ab, da der Rand von Ω gerade der Einheitskreis ist. u_0 ist demnach eine 2π–periodische Funktion in φ und lässt sich als Fourierreihe darstellen: $u_0(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi))$. Dies ist aber gerade die Evaluation der Funktion

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(r,\varphi) + b_k s_k(r,\varphi)) \; (\star)$$

in $r = 1$ und wir folgern mit Teil a), dass $(\star)$ die gesuchte Lösung ist.

2. Der Separationsansatz $u(x,y) := X(x)Y(y)$ führt zu $X''/X = -Y''/Y =: \lambda$. Wenn wir triviale Lösungen ausschliessen wollen, implizieren die Randbedingungen $u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0$ gerade $X(0) = 0, X(1) = 0$ und $Y(0) = 0$. Die gewöhnliche Differentialgleichung $X'' = \lambda X$ kann diese Randbedingungen nur erfüllen, falls $\lambda < 0$. In diesem Fall folgt mit $-\omega^2 = \lambda$

$$X(x) = a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \sin(\omega x)$$

und $a_\omega = 0$ wegen $X(0) = 0$. Aus $X(1) = 0$ folgt $\sin(\omega) = 0$ und damit $\omega = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Die Lösung ist demnach $X_n(x) = b_n \sin(nx)$. Aus Symmetriegrünten genügt es, natürliche n zu betrachten. Die Differentialgleichung für Y wird dadurch zu $Y'' = (\pi n)^2 Y$ und hat die Lösung

$$Y_n(y) = c_n \cosh(\pi n y) + d_n \sinh(\pi n y).$$

Beachte dass $\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ und $\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Aus $Y(0) = 0$ folgt $c_n = 0$ und wir finden $Y_n(y) = d_n \sinh(\pi n y)$. Damit ist

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sinh(\pi n y) \sin(\pi n x).$$

Bitte wenden!

Um die Bedingung $u(x,1) = \cos^2(2\pi x) - 1$ zu erfüllen, betrachten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e_n \sinh(\pi n)}_{=:C_n} \sin(\pi n x) = \cos^2(2\pi x) - 1.$$

Da die Reihe $\sum_n C_n \sin(\pi n x)$ nur Sinusterme enthält, stellt sie notwendigerweise eine ungerade Funktion dar. Die Koeffizienten C_n sind also die Fourierkoeffizienten der ungeraden 2-periodischen Fortsetzung h von $\cos^2(2\pi x) - 1$. Diese Betrachtungsweise ist legitim, da wir uns nur für den Bereich $x \in [0,1]$ interessieren. Da das Produkt zweier ungerader Funktionen gerade ist, folgt:

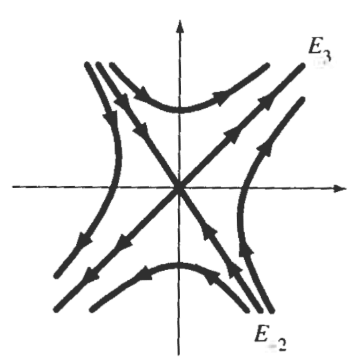
$$\begin{aligned}
C_n &= \int_{-1}^{1} h(x) \sin(\pi n x) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \cos^2(2\pi x) \sin(\pi n x) \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sin(\pi n x) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{16((-1)^n - 1)}{n(n^2 - 16)\pi} \\
&= \begin{cases} \frac{32}{n(n^2-16)\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Wegen $e_n = \frac{C_n}{\sinh(\pi n)}$ folgt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32 \sinh(\pi(2n-1)y) \sin(\pi(2n-1)x)}{(2n-1)((2n-1)^2 - 16)\pi \sinh(\pi(2n-1))}.$$

3. **a)** Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (-2,3)^T$ und damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

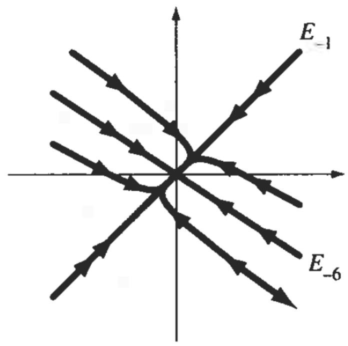
$$\vec{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Siehe nächstes Blatt!

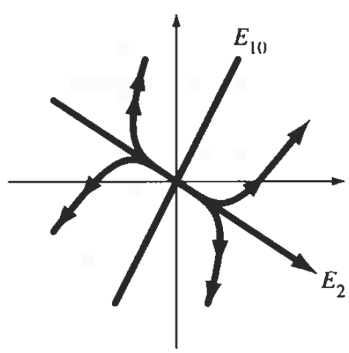
b) Hier sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = -1$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (-3,2)^T$ und $v_2 = (1,1)^T$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-6t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 10$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (-3,2)^T$ und $v_2 = (1,2)^T$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

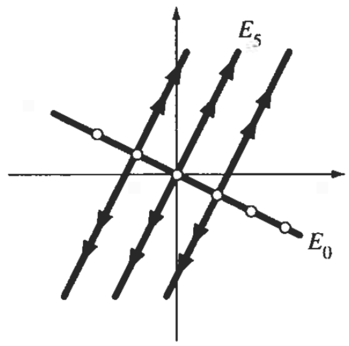
$$\vec{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



d) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (-2,1)^T$ und $v_2 = (1,2)^T$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!



4. **a)** Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1, -1)^T$ und $v_2 = (0, 1)^T$. Damit ist das gesuchte Bild I.

b) Hier sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$. Da der Realteil negativ ist, sind die Bahnen spiralförmig einwärts verlaufend und gegen den Uhrzeigersinn (beachte, dass für $\vec{x}(0) = (1, 0)^T$ gilt: $\dot{\vec{x}}(0) = (-3/2, 2)^T$). Das passende Bild ist IV.

c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (0, 1)^T$ und $v_2 = (1, -1)^T$. Dies entspricht Bild V.

5. Beachte: Die nachfolgenden dynamischen Systeme haben alle die folgende Struktur:

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$$

Die Linearisierung des Systems in einem Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch das System

$$\dot{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

a) Der Ursprung ist der einzige Gleichgewichtspunkt. Für die Linearisierung gilt an dieser Stelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(0,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

was eine Punktquelle ist. Da die Linearisierung nichtverschwindende Eigenwerte hat, wird das System gut approximiert.

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Gleichgewichtspunkte dieses Systems sind die Punkte (x, y), für die $\sin x = \cos y = 0$ gilt, d.h. $x_k = k\pi$ und $y_\ell = (\ell - \frac{1}{2})\pi$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Die Linearisierung ist in den Punkten (x_k, y_ℓ) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos x_k & 0 \\ 0 & -\sin y_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^\ell \end{pmatrix},$$

was eine Quelle ist, falls k und ℓ beide gerade sind, eine Senke, falls k und ℓ ungerade sind und ein Sattel sonst. Das Phasenporträt zerlegt die xy–Ebene in ein periodisches Gitter mit Quadraten der Seitenlänge π. Jede Gitterzelle hat eine Quelle in einer Ecke, eine Senke in der gegenüberliegenden Ecke und Sattelpunkte in den übrigen Ecken. Da in allen Gleichgewichtspunkten die Linearisierung regulär ist, wird das Verhalten durch die Linearisierung gut wiedergegeben.

c) Der einzige Gleichgewichtspunkt ist der Ursprung, wo die Linearisierung die Nullabbildung ist:

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Punkt hat eine singuläre Linearisierung und damit wird das Verhalten durch die Linearisierung schlecht bzw. überhaupt nicht wiedergegeben. Tatsächlich sieht das dynamische System im ersten Quadranten aus wie eine Quelle, im zweiten und vierten Quadranten wie ein Sattelpunkt und im dritten Quadranten wie eine Senke.