D-USYS, D-HEST, D-ERDW — Mathematik III — HS 13

Dr. A. Cannas

Lösung zur Serie 6

1. **a)** Die Lösungen sind konstant, falls ihre Ableitungen verschwinden, d.h.

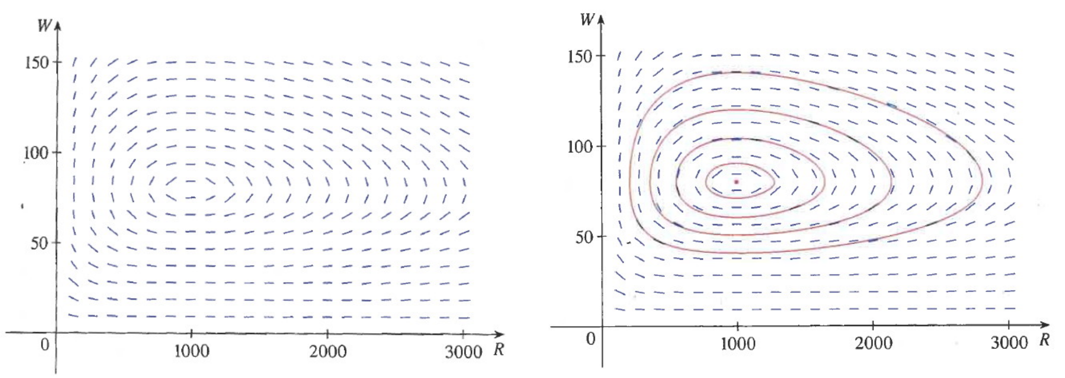
$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0, W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0,$$

Eine Lösung ist demnach $R = W = 0$. (Falls es weder Hasen noch Wölfe gibt, kann eine Population natürlich auch nicht wachsen). Die andere konstante Lösung ist $W = 80$ und $R = 1000$. Dies kann man so deuten, dass 1000 Hasen ausreichen, um eine konstante Population von 80 Wölfen zu ernähren.

b) Anwenden der Kettenregel impliziert

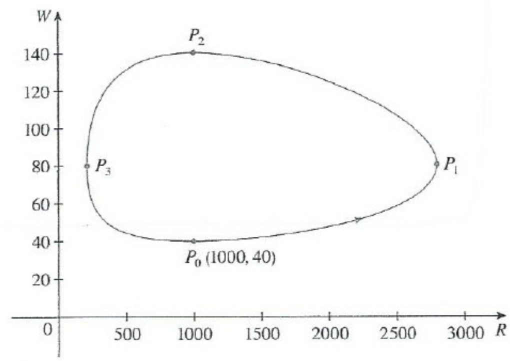
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R} = \frac{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}.$$

c) Die Abbildung zeigt das Richtungfeld und einige Lösungskurven



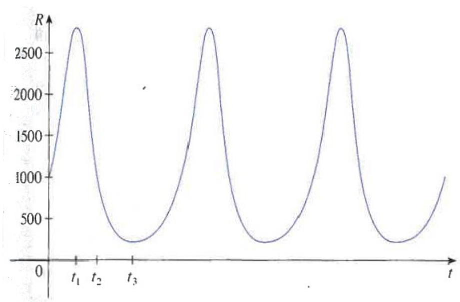
d) Hier interessieren wir uns für die Lösungskurve durch den Punkt $(1000, 40)$, die unten abgebildet ist.

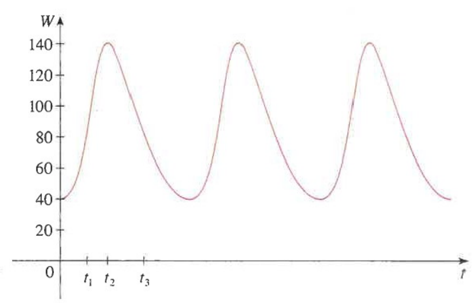
Bitte wenden!



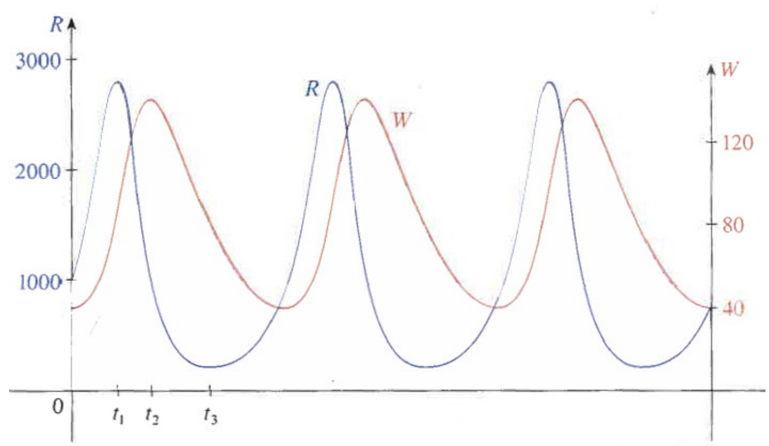
Mit verlaufender Zeit drehen wir uns im Gegenuhrzeigersinn entlang der Kurve. Dies folgt sofort aus $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(0) = 40$. Wir sehen, dass sich in $(1000, 40)$ nicht genügend Wölfe befinden, um die Populationen im Gleichgewicht zu behalten. Dies führt zu einer Zunahme an Hasen, welche wieder in einer Zunahme an Wölfen resultiert, die die Hasen daraufhin wieder dezimieren.

e) Das Bild links zeigt die Hasen-, jenes rechts die Wolfpopulation als Funktionen der Zeit.





Dieses Bild zeigt die beiden Funktionen reskaliert. Rot sind die Wölfe und blau die Hasen.



2. **a)** Hier ist x der Räuber und y die Beute. Das Modell geht davon aus, dass sich die Beu-

Siehe nächstes Blatt!

te exponentiell entwickelt, falls keine Räuber vorhanden sind. Deswegen entscheidet das Vorzeichen von 0.1, dass y die Beute ist. Die Beute ist nur durch die Population der Räuber eingeschränkt und die Räuber ernähren sich ausschliesslich von der Beute (einfachstes Modell).

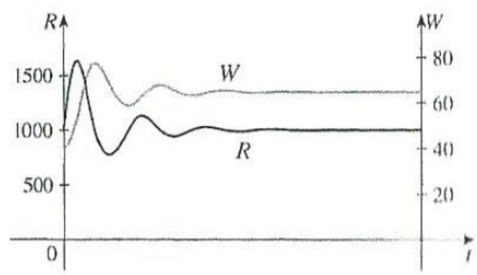
b) Hier ist x die Beute und y der Räuber. Die Beute hat einen Rückgang in x^2, also ein nicht vom Räuber beeinträchtigtes Wachstum. Der Räuber hingegen hat keine weiteren Futterquellen.

3. **a)** Die Hasenpopulation hat nebst der trivialen stabilen Lösung noch eine stabile Lösung bei bei 5000 Exemplaren.

b) Es gibt die Gleichgewichtsösung $W = 0, R = 0$. Die Gleichung $0.02W = 0.00002RW$ liefert $R = 1000$ und die Gleichung $0.001RW = 0.08R(1 - 0.0002R)$ nach einsetzen $W = 64$. Aus a) wissen wir weiter, dass $R = 5000, W = 0$ eine stabile Lösung ist.

c) Es pendelt sich ein Gleichgewicht ein bei $R = 1000$, $W = 64$.

d) Siehe Bild:



4. **a)** Die Gleichung lautet

$$p'(t) = \frac{1}{256} p \left(1 - \frac{p}{100}\right),$$

wobei p die Population in Milliarden bezeichnet.

b) Die Lösung dieser Gleichung mit Initialdatum $p(0) = 5.3$ (siehe Vorlesung für eine Herleitung) ist gegeben durch

$$p(t) = 100 \left(1 - \frac{\frac{94.7}{5.3}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{265}} + \frac{94.7}{5.3}}\right)$$

Es folgt $p(10) = 5.492$.

Bitte wenden!

c) Es gilt $p(110) = 7.814$, $p(510) = 27.718$.

d) Wir verfahren analog und ersetzen 100 durch 50. In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch

$$p(t) = 50\left(1 - \frac{8.434}{\mathrm{e}^{\frac{t}{265}} + 8.434}\right)$$

Es folgt $p(1) = 5.481$, $p(110) = 7.612$ und $p(510) = 22.413$.

5. Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{K y_0 \mathrm{e}^{kt}}{K + y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right)}$$

a) Die Bedingungen $y(0) = y_0 = 2 \cdot 10^7$ kg und $K = 8 \cdot 10^7$ kg liefern

$$y(1) \approx 3.2324 \cdot 10^7 \text{ kg}.$$

b) Wir müssen die Gleichung

$$2y_0 = \frac{K y_0 \mathrm{e}^{kt}}{K + y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right)}$$

nach t auflösen. Division durch y_0 und Multiplikation mit dem Nenner der rechten Seite ergibt die erste Formelzeile, dann ergeben sich die anderen durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned}
2K + 2y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right) &= K\mathrm{e}^{kt} \\
2K - 2y_0 &= (K - 2y_0)\mathrm{e}^{kt} \\
2\frac{K - y_0}{K - 2y_0} &= \mathrm{e}^{kt} \\
\log\left(2\frac{K - y_0}{K - 2y_0}\right) 1/k &= t
\end{aligned}$$

Es folgt $t = \log(\sqrt[k]{3}) \approx 1.547$ Jahre.