1. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) := xyz$ über die Kugel mit Zentrum im Ursprung und Radius 1. (2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Symmetrien.

Lösung:

- Betrachte den Diffeomorphismus $j : B_1(0) \to B_1(0), p \mapsto -p$. Dann gilt nach der Transformationsformel für Integrale

$$\int_{B_1(0)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{B_1(0)} (f \circ j)(x,y,z)\,|\det(-E_3)|\,\mathrm{d}V$$
$$= -\int_{B_1(0)} f(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

  Daraus folgt, dass das gesuchte Integral den Wert null annimmt.

- Die Funktion f ist ungerade in x und der Integrationsbereich symmetrisch zur $yz-$Ebene. Daraus folgt, dass das Integral verschwindet. Das Argument funktioniert gleichermassen, wenn man x, y und z permutiert.

- Direkte Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\int_{B_1(0)} f\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \cos\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r$$
$$= \int_0^1 \int_0^\pi r^5 \sin^3\vartheta \cos\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi}_{=0} \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r = 0$$

- Direkte Rechnung in kartesischen Koordinaten

$$\int_{B_1(0)} f\mathrm{d}V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} yz \underbrace{\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} x\mathrm{d}x}_{=0} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

Bitte wenden!

2. Zeichnen Sie den Graph der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe. (5 Punkte)

Lösung:

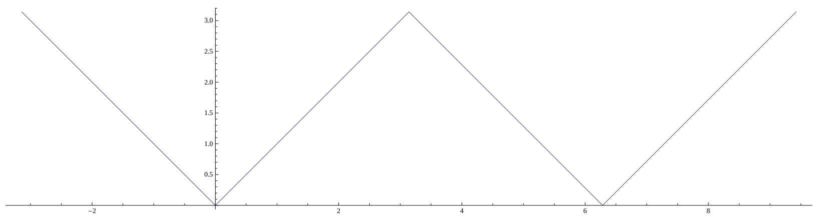

Abbildung 1: Graph der Fortsetzung der Funktion g auf ganz $\mathbb{R}$.

(*Zeichnung richtig: 1 Punkt*) Die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion g ist offensichtlich gerade. Damit verschwinden alle Sinusterme (*1 Punkt*). Für die Koeffizienten der Cosinusterme unterscheiden wir die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t\cos(kt)\mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi\cos(kt)\mathrm{d}t}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} t\cos(kt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k}\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die korrekte Berechnung der Koeffizienten gibt 2 Punkte.

$$\mathcal{F}(g(x)) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

1 Punkt für das Aufschreiben der Fourierreihe.

Siehe nächstes Blatt!

3. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x,y,z) := \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2z^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $\mathcal{K} := \{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ und } z \geqslant 0\}$ (Sie können die Fläche selber orientieren). (5 Punkte)

Hinweis:

- Bestimmen Sie zunächst den Fluss durch $\mathcal{H} := \{(x,y,z)\,|x^2+y^2 = 1 \text{ und } z = 0\}$ und verwenden Sie anschliessend den Satz von Gauss.
- Es gilt: $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$.

Lösung: Betrachte die Halbkugel

$$\mathcal{B} := \left\{(x,y,z)\,\middle|x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \text{ und } z \geqslant 0\right\}$$

und beachte, dass $\partial\mathcal{B} = \mathcal{K}\cup\mathcal{H}$. Nach dem Satz von Gauss gilt demnach (ν bezeichnet die äussere Einheitsnormale von $\mathcal{B}$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G\mathrm{d}V &= \int_{\mathcal{K}\cup\mathcal{H}} \langle G,\nu\rangle\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\mathcal{K}} \langle G,\nu\rangle\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{H}} \langle G,\nu\rangle\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

(*1 Punkt für das korrekte Formulieren des Satzes von Gauss*) Wegen $\operatorname{div} G(x,y,z) = 1 + 2 = 3$, ist

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G\mathrm{d}V = 3\operatorname{vol}(\mathcal{B}) = 2\pi.$$

(*1 Punkt für das korrekte Berechnen der Divergenz & des Integrals*) Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \langle G,\nu\rangle\,\mathrm{d}S &= \int_{\mathcal{H}} \left\langle \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2z^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}S \\ &= -\int_{\mathcal{H}} y^2\mathrm{d}S \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^2\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1-\cos(2\varphi))\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

(*2 Punkte für das korrekte Berechnen des Flusses*)

Damit ist der Fluss von G durch $\mathcal{K}$ gegeben durch $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi$. Die andere Orientierung spendiert ein Vorzeichen. (*1 Punkt für die korrekte Schlussfolgerung*)

Siehe nächstes Blatt!

4. Es sei Γ die Schnittellipse des Zylinders $\{(x,y,z)|x^2+y^2=1\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z)|z=2y\}$.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x,y,z)$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} g(x,y,z) \\ \sin(x^2)xz\mathrm{e}^{xyz} \\ \sin(x^2)xy\mathrm{e}^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Wegs Γ gleich 0 ist. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Arbeit des einmal durchlaufenen Wegs Γ (wählen Sie selbst eine Orientierung) des Vektorfeldes

$$V(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

i. direkt.

ii. mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(4 Punkte)

Lösung:

a) Falls F konservativ ist, verschwindet die Arbeit längs jedes geschlossenen Weges. Wir suchen also eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\nabla f = F$.

(*1 Punkt für die Überlegung*)

Aus der Integration nach y resp. z der $y-$ resp. $z-$Komponente von F folgt, dass $f(x,y,z) := \sin(x^2)\mathrm{e}^{xyz}$ ein Potential ist, falls $g = f_x$. Damit ist

$$g(x,y,z) := \cos(x^2)2x\mathrm{e}^{xyz} + \sin(x^2)yz\mathrm{e}^{xyz}$$

eine (nicht eindeutige!) Funktion, die das Gewünschte tut. (*1 Punkt für die Angabe einer geeigneten Funktion g.*)

b) i. Parametrisiere Γ via

$$\gamma : [0,2\pi] \to \Gamma, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

(*1 Punkt für die Parametrisierung*) und sei τ der entsprechend orientierte Einheitstangentialvektor.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \langle V, \tau\rangle \,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \langle (V\circ\gamma)(t), \dot\gamma(t)\rangle \,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin^2 t\\ -\cos t\sin t\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t\\ \cos t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\right\rangle \mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{2\pi} \big(\sin^3 t + \cos^2 t\sin t\big)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{2\pi} \sin t\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

(*1 Punkt für die korrekte Rechnung*)

ii. Parametrisiere die Schnittellipse Σ via

$$\Phi : (r,t) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ 2r\sin t\end{pmatrix}$$

(*1 Punkt für die Parametrisierung*) Einen Normalenvektor auf diese Schnittebene erhält man entweder durch eine elementargeometrische Betrachtung oder durch die Berechnung des Kreuzprodukes $\Phi_r \times \Phi_t$.
Wir arbeiten mit dem unnormierten Normalen-vektor $(0,-2r,r)^T$, weil dessen Norm gerade dem Koeffizient des Volumenelementes entspricht.

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} v, \nu\rangle \,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -3r\sin t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -2r\\ r\end{pmatrix}\right\rangle \mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -3r^2\sin t\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{2\pi} \sin t\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

(*1 Punkt für die korrekte Rechnung*)

Siehe nächstes Blatt!

5. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung.

$$u_x(x,t) - \frac{u(x,t)}{x} - \frac{u_t(x,t)}{t} = 0$$

(4 Punkte)

Lösung: Der Ansatz $u(x,t) := X(x)T(t)$ führt auf die Gleichung

$$\frac{X'}{X} - \frac{1}{x} = \frac{\dot{T}}{T \cdot t},$$

wobei jede Seite konstant ($= \lambda$) sein muss (*1 Punkt*).

Die Gleichung

$$\frac{X'}{X} = \lambda + \frac{1}{x}$$

lässt sich durch Integration nach x lösen. Es folgt $X(x) := C_1 x \mathrm{e}^{\lambda x}$ (*1 Punkt*).

Die Gleichung

$$\frac{\dot{T}}{T} = \lambda t$$

hat als Lösung (analog) $T(t) = C_2 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t^2}$ (*1 Punkt*). Mit $C := C_1 \cdot C_2$ ergibt sich als allgemeine Lösung

$$u(x,t) = Cx\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t^2} \qquad (\textit{1 Punkt}).$$

Da die Gleichung linear ist, sind auch Summen (auch Riemannsche) von Lösungen wieder Lösungen (*1 Punkt*).