ETH Zürich Wintersession WS14
Dr. A. Cannas

Musterlösung Mathematik III

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

1. Finden Sie eine Lösung $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung
$$u_t - u_{xx} = 0$$
unter den Nebenbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ und $u(x, 0) = 4\sin(4x)$.

9 Punkte

Lösung: Separation der Variablen liefert $X\dot{T} = X''T$ und damit
$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$
(*1 Punkt für korrektes Aufstellen, 1 Punkt für begründete Bestimmung des Vorzeichens von* λ^2) Das ergibt zunächst $X(x) = C\sin x + D\cos x$ (*1 Punkt*) und zusammen mit der Randbedingung $X(x) = C\sin(\lambda x)$ (*1 Punkt für Verschwinden der Cosinusterme*) $\lambda \in \mathbb{Z}$. Als allgemeine Lösung finden wir
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx).$$
(*1 Punkt für die korrekte Lösung der Gleichung in t und 1 Punkt für das korrekte Zusammenfügen und 1 Punkt für endliche oder unendliche Linearkombination.*) Die Initialbedingung impliziert, dass alle C_n bis auf $C_4 = 4$ (*1 Punkt*) verschwinden und wir finden
$$u(x, t) := 4\mathrm{e}^{-16t} \sin(4x).$$
(*1 Punkt*)

2. Benutzen Sie die Fouriertransformation in der x-Variablen, um das folgende Problem für $t \geqslant 0$ zu lösen:

$$u_t = u_{xx} + 3u$$
$$u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Hinweis: Die Fouriertransformation von $f(x) := \exp\left(-c^2x^2\right)$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4c^2}\right).$$

7 Punkte

Lösung: Die Fouriertransformation der Gleichung liefert die ODE $\hat{u}_t = -\lambda^2\hat{u} + 3\hat{u}$ (*1 Punkt*), deren Lösung gegeben ist durch $\hat{u}(\lambda,t) = C\exp\left((3-\lambda^2)t\right)$ (*1 Punkt*). Tranformieren der Initialbedingung liefert (Hinweis mit $c = 1$)

$$\hat{u}(\lambda,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) = C \ (\textit{1 Punkt})$$

und wir finden als Lösung für das transformierte Problem

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(3t - \lambda^2\left(\frac{1}{4} + t\right)\right) \ (\textit{1 Punkt})$$

Um die ursprüngleiche Gleichung zu lösen, benötigen wir nun die inverse Fouriertransformation. Es folgt

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}(\lambda,t)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(3t\right) \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(-\lambda^2\left(\frac{1}{4} + t\right)\right)\right].$$

Erneutes Verwenden des Hinweises mit $c = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}$ führt auf

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(3t - \frac{x^2}{4t+1}\right).$$

(*3 Punkte für Fourierinversion, Rechnung und Endergebnis.*)

3. Eine Vogel- und eine Insektenpopulation werden wiefolgt modelliert:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.4x - 0.002xy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.2y + 0.000008xy \end{cases}$$

a) Welche der Variablen x und y repräsentiert die Vogel- und welche die Insektenpopulation? Bergünden Sie Ihre Antwort.

b) Finden Sie die Gleichgewichtslösungen und interpretieren Sie diese.

c) Finden Sie eine Differentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ist $y(x)$ eine steigende oder fallende Funktion, falls $(x, y) = (10000, 100)$?

7 Punkte

Lösung:

a) Die Variable x steht für die Insekten (Beute) und y für die Vögel (Räuber) (*1 Punkt*).

b) Der Punkt $(0, 0)$ (triviale Erklärung) (*1 Punkt*) und der Punkt $(25000, 200)$ (*1 Punkt*) sind Gleichgewichtspunkte. Der zweite Punkt ist so zu deuten, dass bei 25000 Insekten und 200 Vögeln weder genügend Insekten vorhanden sind, um die Vogelpopulation wachsen zu lassen, noch genügend Vögel da sind, um den Insektenbestand zu dezimieren (*1 Punkt*).

c) Die Differentialgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-0.2y + 0.000008xy}{0.4x - 0.002xy} \quad (\textit{1 Punkt})$$

Im Punkt $(10^4, 10^2)$ gilt $\frac{8-20}{4000-2000} < 0$ und damit ist die Funktion $y(x)$ an dieser Stelle fallend (*1 Punkt Rechnung, 1 Punkt Deutung*).