ETH Zürich Wintersession WS14
Dr. A. Cannas

Musterlösung Probeprüfung Mathematik III

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

1. Lösen Sie das folgende Problem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \sin(2x) - \sin(3x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(40%)

Lösung: Separation der Variablen ergibt $\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$, wobei die Wahl der Konstanten $-\lambda^2$ aus den Randbedingungen folgt. Weiterhin folgt aus jenen, dass die Lösung der Gleichung $X'' = -\lambda^2 X$ gegeben ist durch $X(x) = C\sin(\lambda x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{Z}$. Die allgemeine Lösung (die Gleichung $\ddot{T} = -\lambda^2 T$ wird analog gelöst) ist dann gegeben durch

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)\right) \sin(kx),$$

wobei die Konstanten C_k in den Konstanten A_k und B_k absorbiert worden sind. Die erste Initialbedingung impliziert, dass alle Koeffizienten A_k bis auf $A_2 = 1$ und $A_3 = -1$ verschwinden. Die zweite Initialbedingung zeigt, dass alle B_k null sind ausser $B_1 = 1$. Insgesamt erhalten wir als Lösung also

$$u(x,t) = \sin(t)\sin(x) + \cos(2t)\sin(2x) - \cos(3t)\sin(3x).$$

2. Bestimmen Sie die Fouriertransformation von

$$f(x) := \begin{cases} \pi & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und verwenden Sie das Resultat, um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Hinweis: $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$

(30%)

Lösung: Für die Fouriertransformation von f gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &:= \frac{\pi}{2\pi} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\lambda} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \end{aligned}$$

und für das Integral folgt mittels inverser Fouriertransformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \left. \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \right|_{\lambda=0} \mathrm{d}x = f(0) = \pi.$$

3. Ein Modell für die Verbreitung eines Gerüchts besagt, dass die Rate der Verbreitung proportional ist zum Produkt aus dem Anteil y der Population, der das Gerücht gehört hat und dem Anteil der Population, der das Gerücht nicht gehört hat.

   a) Schreiben Sie eine entsprechende Differentialgleichung auf, welche von y erfüllt wird und lösen Sie diese.

   b) Um 8 Uhr morgens wissen 10% einer Bevölkerung von einem Gerücht und am Mittag sind es bereits 50%. Wie gross ist der Anteil der Bevölkerung, der vom Gerücht um 4 Uhr nachmittags weiss?

(30%)

Lösung:

a) Für eine Proportionalitätskonstante k gilt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(1-y).$$

Trennung der Variablen liefert zusammen mit einer Partialbruchzerlegung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}-\tilde{y}^2} = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}} + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{1-\tilde{y}} = \int_0^t k\mathrm{d}u.$$

Durch Integration finden wir $\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) - \ln\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) = kt$ und damit

$$\frac{y(1-y_0)}{(1-y)y_0} = \mathrm{e}^{kt}.$$

Auflösen nach y ergibt

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)\mathrm{e}^{-kt}}.$$

b) Wir setzen den Zeitpunkt $t=0$ auf 8 Uhr fest und finden $y_0 = 0.1$. Aus dieser Angabe und der Angabe $y(4) = 0.5$ folgt

$$\frac{0.1}{0.1 + 0.9\mathrm{e}^{-4k}} = 0.5$$

und damit $\mathrm{e}^{-4k} = \frac{1}{9}$. Der gesuchte Anteil ist $y(8)$ und es gilt mit $\mathrm{e}^{-8k} = \left(\mathrm{e}^{-4k}\right)^2$

$$y(8) = \frac{0.1}{0.1 + \frac{1}{90}} = 0.9 = 90\%.$$