1. Integrieren Sie die Funktion $f(x, y, z) := xyz$ über die Kugel mit Zentrum im Ursprung und Radius 1. (2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Symmetrien.

Bitte wenden!

2. Zeichnen Sie den Graph der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe. (5 Punkte)

Siehe nächstes Blatt!

3. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $\mathcal{K} := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geqslant 0\}$ (Sie können die Fläche selber orientieren). (5 Punkte)

Hinweis:

- Bestimmen Sie zunächst den Fluss durch $\mathcal{H} := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 0\}$ und verwenden Sie anschliessend den Satz von Gauss.
- Es gilt: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha))$.

Bitte wenden!

4. Es sei Γ die Schnittellipse des Zylinders $\{(x,y,z)|x^2+y^2=1\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z)|z=2y\}$.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x,y,z)$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} g(x,y,z) \\ \sin(x^2)xz\mathrm{e}^{xyz} \\ \sin(x^2)xy\mathrm{e}^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Wegs Γ gleich 0 ist. (2 Punkte)

b) b) Berechnen Sie die Arbeit des einmal durchlaufenen Wegs Γ (wählen Sie selbst eine Orientierung) des Vektorfeldes

$$V(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

i. direkt.

ii. mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(4 Punkte)

Siehe nächstes Blatt!

5. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung.

$$u_x(x,t) - \frac{u(x,t)}{x} - \frac{u_t(x,t)}{t} = 0$$

(4 Punkte)