Serie 1

1. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x(x,t) + u_t(x,t) = u^2(x,t) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = h(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.

Zeigen Sie, dass (1) und (2) erfüllt werden von der Funktion

$$u(x,t) = \frac{h(x-t)}{1 - t\,h(x-t)}.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = (\sin(x+t) - 1)\,\mathrm{e}^t + 1$$

die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x(x,t) - u_t(x,t) + u(x,t) = 1$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

3. *Gewöhnliche Differentialgleichungen zur Vorbereitung auf den Separationsansatz*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) - 2x(t) = t^2 \mathrm{e}^{2t}, \quad x(0) = 1$$

und skizzieren Sie die Lösungskurve.

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie (für beliebigen Parameter ω) die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = \omega\, x(t).$$

Von welcher Form muss ω sein, wenn gelten soll $x(t+T) = x(t)$, und wie sieht die allgemeine Lösung dann aus?

4. *Separationsansätze*
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0$$

in der Form

a) $u(x,t) = a(x)\, b(t)$,

b) $u(x,t) = v(x) + w(t)$.

5. *Separationsansatz*
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0$$

in der Form $u(x,t) = U(x)\, T(t)$.

Abgabe: 7. Oktober 2013