

Serie 2

1. Finden Sie die Fourierreihen folgender Funktionen:

a) $f_1(x) = x - \pi$ für $0 < x < 2\pi$

b) $f_2(x) = x - \pi$ für $-\pi < x < \pi$

c) $f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq x \leq (n + \frac{1}{2}), n \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Funktion f_3 ist die in der Praxis wichtige Impulsfunktion.

2. Stellen Sie die Funktion

$$f(x) := (x - \pi)^2$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ durch ihre Fourierreihe dar. Studieren Sie anschliessend die Situation speziell an der Stelle $x = 0$. Welche "lustige" Formel ergibt sich?

3. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{2} \cos x}{\frac{5}{4} - \cos x}$$

auf dem Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ die Fourierentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}$$

besitzt.

Hinweis: Überlegen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k} \right),$$

wobei die Reihe rechter Hand summiert werden kann.

Bitte wenden!

4. (aus Norbert Hungerbühler: Einführung in partielle Differentialgleichungen, vdf Hochschulverlag 1997) Welche Symmetrieeigenschaften einer 2π -periodischen Funktion führen dazu, dass in ihrer Fourierreihe

- a) nur Terme der Form $a_n \cos(nx)$ mit geradem n
- b) nur Terme der Form $a_n \cos(nx)$ mit ungeradem n
- c) nur Terme der Form $b_n \sin(nx)$ mit geradem n
- d) nur Terme der Form $b_n \sin(nx)$ mit ungeradem n

aufzutreten?

Abgabe: 14. Oktober 2013