Serie 3

1. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Anfangswertproblems

$$x\,u_x(x,t) + u_t(x,t) = t\,u(x,t),$$
$$u(x,0) = x^2,$$

wobei x eine reelle Variable ist.

2. Lösen Sie das folgende vollständige partielle Differentialgleichungssystem:

Differentialgleichung:

$$u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Anfangsbedingungen:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } -\pi \le x < \pi, \\ f(x+2\pi) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Randbedingungen:

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t \ge 0. \tag{4}$$

Vorgehen:

a) Bestimmen Sie zunächst eine allgemeine Lösung von (1). Finden Sie anschliessend jene Lösungen, die zusätzlich (2) erfüllen. Was muss dann gelten, damit (4) erfüllt ist?

b) Superpositionsprinzip; Superposition der Basislösungen ergibt die Fourierreihe einer Funktion, welche zudem auch die inhomogene Bedingung (3) erfüllt.

3. Finden Sie die Lösungen $u : [0,\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

welche die folgenden Nebenbedingungen erfüllen:

a)

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin x - 3\sin(2x) + 2\sin(3x). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 1, \\ u(\pi,t) &= 1+\pi \\ u(x,0) &= 1 + (\pi+1)x - x^2. \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das folgende Problem für die Wellengleichung:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} &=& u_{xx} & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)\,, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &=& 0 & t \geq 0\,, \\ u(x,0) &=& 2\sin^2(2\pi x) & x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) &=& 0 & x \in [0,1]\,. \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Identität:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$$

5. Zu einer 2π-periodischen Funktion f existiert eine Folge komplexer Zahlen

$$\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$$

so, dass an jeder Stetigkeitsstelle x von f gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \text{ mit} \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler'schen Formeln, dass dies nichts anderes ist, als eine Umformulierung des in der Vorlesung gesehenen "reellen" Hauptsatzes aus der Fourierreihentheorie.

Abgabe: 21. Oktober 2013