Serie 4

1. Bei dieser Übung sollen uneigentliche Integrale repetiert werden: Berechnen sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t \;\text{ und }\; \int_{1}^{\infty} \frac{\ln t}{t^3}\mathrm{d}t$$

und überlegen Sie sich, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

existiert.

2. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$

b) $g(x) = \begin{cases} \pi - |x| & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. Bestimmen Sie die beschränkte Funkton $u(x,t)$, für welche mit der Funktion $g(x)$ aus Aufgabe 2b) gilt:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}$$

4. Benutzen Sie die Fourier-Transformation (in der x-Variablen), um die folgenden Probleme zu lösen:

a)

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= \mathrm{e}^{-x^2} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b)

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xxxx} &= 0 \\ u(x,0) &= \mathrm{e}^{-x^2} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Fourier-Transformierte von $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

5. (aus Norbert Hungerbühler: Einführung in partielle Differentialgleichungen, vdf Hochschulverlag 1997) Lösen Sie das Problem der gezupften Saite: Finden Sie eine Funktion $u : [0,L] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, die die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit den Rand- und Initialbedingungen

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0 \\ u(L,t) = 0 & \text{für } t > 0 \\ u(x,0) = \frac{L}{2} - \left|x - \frac{L}{2}\right| & \text{für } 0 < x < L \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } 0 < x < L \end{cases}$$

löst

a) mit der Fourier'schen Methode

b) mit der Methode von d'Alembert.

Abgabe: 28. Oktober 2013