Serie 5

1. (aus Norbert Hungerbühler: Einführung in partielle Differentialgleichungen, vdf Hochschulverlag 1997) In Polarkoordinaten (r, φ) in der Ebene hat der Laplace-Operator die Darstellung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Sei $\Omega = B_1(0) = \{(r, \varphi) | 0 \leqslant r < 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ die Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$.

a) Man zeige: Für alle $k \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen

$$c_k(r, \varphi) := r^k \cos(k\varphi), \qquad s_k(r, \varphi) := r^k \sin(k\varphi)$$

Lösungen der Gleichung

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega.$$

b) Man zeige: Zu jeder stückweise glatten Funktion u_0 auf $\partial\Omega$ gibt es eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hinweis: Man entwickle u_0 in eine Fourier-Reihe.

2. Man finde mittels Separation der Variablen eine Lösung $u : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ der Potentialgleichung $\Delta u = 0$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) &= 0 \text{ für } y \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= 0 \text{ für } x \in (0, 1) \\ u(x, 1) &= \cos^2(2\pi x) - 1 \text{ für } x \in (0, 1) \end{aligned}$$

3. Skizzieren Sie Phasen-porträts für die folgenden dynamischen Systeme:

a) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

b) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$

Bitte wenden!

c) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \vec{x}$

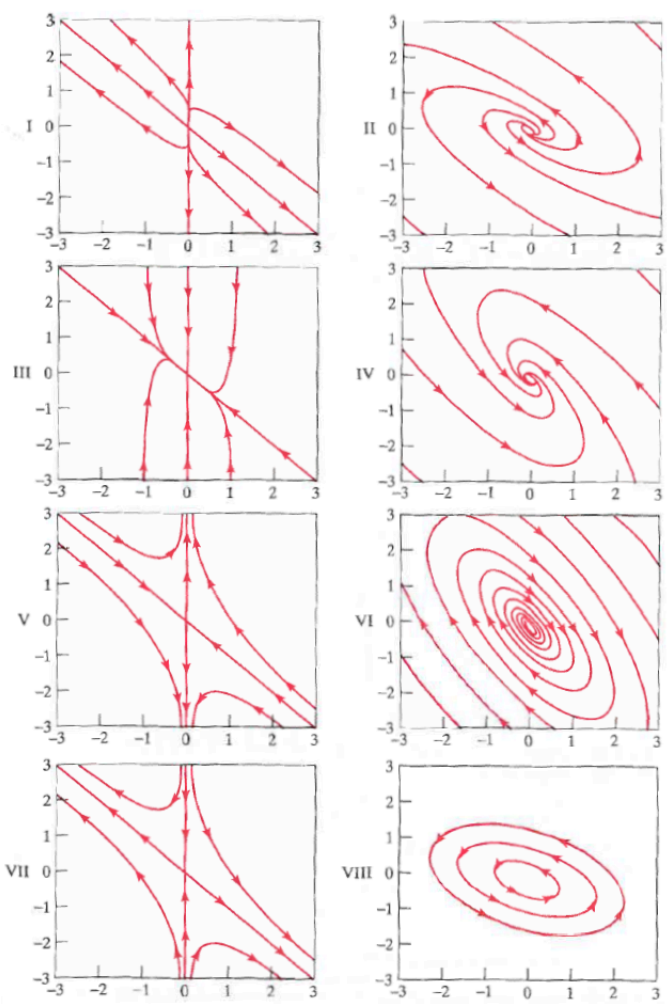
d) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$

4. Finden Sie für jedes der folgenden dynamischen Systeme das entsprechende Phasenporträt.

a) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2.5 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

b) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

c) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$



Siehe nächstes Blatt!

5. Nachfolgend sind drei nichtlineare Systeme gegeben. Finden Sie jeweils alle Gleichgewichtspunkte, beschreiben Sie das Verhalten des assoziierten linearen Systems und versuchen Sie, das Phasenporträt zu beschreiben. Wie gut beschreibt das linearisierte System das Verhalten des nichtlinearen Systems in der Nähe der Gleichgewichtspunkte?

a) $\dot{x} = x + y^2$, $\dot{y} = 2y$

b) $\dot{x} = \sin x$, $\dot{y} = \cos y$

c) $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = y^2$

Abgabe: 4. November 2013