Serie 6

1. Die Population von Hasen R und Wölfen W werde durch die Lotka-Volterra-Gleichungen beschrieben

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = kR - aRW \qquad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -rW + bRW,$$

wobei $k = 0.08$, $a = 0.001, r = 0.02$ und $b = 0.00002$. Die Zeit t ist in Monaten gegeben.

a) Finden Sie die konstanten Lösungen (Gleichgewichtslösungen) des Systems und interpretieren Sie diese.

b) Finden Sie eine Differentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R}$.

c) Zeichnen Sie ein Richtungsfeld für die Differentialgleichung aus b) in der RW-Ebene und einige Lösungskurven.

d) Zeichnen Sie die Lösungskurve durch die Zeit t, in welcher 1000 Hasen und 40 Wölfe vorhanden sind. Beschreiben Sie, wie sich die Populationen verändern.

e) Verwenden Sie d), um Skizzen der Funktionen $R(t)$ und $W(t)$ zu erstellen.

2. Bestimmen Sie in jedem der folgenden Räuber-Beute-Systeme, welche Variable den Räuber, und welche die Beute darstellt. Ist das Wachstum der Beute ausschliesslich durch die Räuber eingeschränkt oder gibt es andere Faktoren? Ernähren sich die Räuber bloss von der Beute oder gibt es noch andere Futterquellen?

a)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -0.05x + 0.0001xy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.1y - 0.005xy$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.015y + 0.00008xy$$

Bitte wenden!

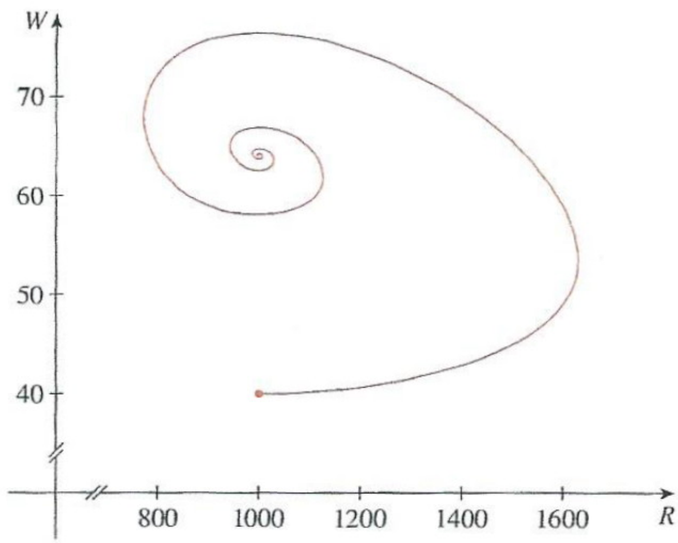
3. In Aufgabe 1 haben Sie die Lotka-Volterra-Gleichungen verwendet, um Populationen von Hasen und Wölfen zu modellieren. Betrachten Sie die veränderten Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW \qquad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -0.02W + 0.00002RW.$$

a) Was geschieht mit der Hasenpopulation, wenn es keine Wölfe gibt?

b) Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte und erklären Sie deren Bedeutung.

c) Das untenstehende Bild zeigt eine Lösungslinie, die im Punkt $(1000, 40)$ startet. Erklären Sie, was mit den beiden Populationen geschieht.



d) Skizzieren Sie Graphen der Hasen- und Wolfspopulation als Funktionen in t.

4. Im Jahre 1990 betrug die Weltbevölkerung ca. 5.3 Milliarden. Die Geburtenrate in den 1990ern reichte von 35 - 40 Millionen jährlich, während die Sterberate sich zwischen 15 - 20 Millionen pro Jahr bewegte. Wir nehmen an, die maximale Kapazität für die Weltbevölkerung sei 100 Milliarden.

a) Schreiben Sie die logistische Gleichung für diese Daten auf und verwenden sie als mittlere anfängliche Wachstumsrate $\frac{1}{265}$.

b) Benutzen Sie die Gleichung, um die Weltbevölkerung im Jahr 2000 zu bestimmen und vergleichen Sie die Zahl mit der tatsächlichen Bevölkerung von 6.1 Milliarden.

c) Machen Sie eine Vorhersage für die Weltbevölkerung in den Jahren 2100 und 2500.

Siehe nächstes Blatt!

d) Wie verändern Sich Ihre Prognosen, falls die maximale Kapazität bei 50 Milliarden liegt?

5. Die pazifische Heilbuttfischerei wurde durch die folgende Differentialgleichung modelliert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

wobei $y(t)$ die Biomasse (totale Population in kg) zur Zeit t (in Jahren) ist, $K = 8 \cdot 10^7$ kg die totale Kapazität und $k = 0.71$.

a) Bestimmen Sie die Biomasse nach einem Jahr, falls $y(0) = 2 \cdot 10^7$ kg.

b) Wie lange dauert es, bis die Biomasse $4 \cdot 10^7$ kg erreicht?

Abgabe: 11. November 2013